# 序　言

今年春天来得很早。书稿在早春三月完成了。为了梳理一下书稿完成后的思绪，信步来到未名湖畔的小山岗上。阳光灿烂，春风拂面，听松涛声声，东望峥嵘的博雅塔，有一种雄伟与庄重的情感；疾风中，倔强的青松迎风伸展着刚劲的臂膀，给人以自强不息的精神；山坡和湖畔，小草青青，桃树含苞，迎春花黄艳艳，向人们展示着大自然的勃勃生机，和谐而充满活力。大自然孕育了分形论，分形论揭示大自然的美妙与神奇。

分形理论创立于70年代中期，其研究对象为自然界和社会活动中广泛存在的无序（无规则）而具有自相似性的系统。分形论借助相似性原理洞察隐藏于混乱现象中的精细结构；为人们从局部认知整体，从有限认识无限提供新的方法论；为不同学科发现的规律性提供崭新的语言和定量的描述；为现代科学技术提供新思想新方法。

世界正经历深刻而巨大的变化，一批崭新的科学概念和思潮正在崛起，并形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展中面临的挑战。分形论诞生在以多种概念和方法相互冲击和汇合为特征的当代。人们把分形论、耗散结构和混沌称为70年代科学上的三大发现。10多年来的发展趋势表明，分形论正被众多学科竞相引入，以新的驱动力推动各学科的新发展。据美国科学情报研究所的计算机显示，世界上1257种权威学术刊物在80年代后期发表的论文中与分形有关

的占37.5%，并呈增长趋势。其研究领域涉及自然科学、哲学和社会科学各个学科。事实上，不同领域现象之间存在惊人的相似性，因此，分形论有可能成为联结现代各学科的纬线。物质世界本来是复杂奇异的，常常具有受分形规律制约的无穷层次结构，在这里传统学科显得苍白无力；定量描述自然构型和现象(自然的和社会的)是学习各学科的第一步。因此，从大学开始应该学习分形的基本概念，以开拓视野、启迪思维、激发创造功能。这也正是作者的初衷。

全书十二章，分为两部分，第一部分着重介绍分形论的基本概念、原理和计算技巧，并对神奇的混沌现象和奇异吸引子作了论述。第二部分为应用方面，讨论分形论在物理、化学、材料、生物、医学、地震、计算机仿真、电子技术和社会科学（思维、文学、音乐、艺术、经济、管理、情报）中的应用。特别就凝聚、相变、渗流、自组织现象、表面、高分子、薄膜晶化、准晶形成、纳米晶体、断裂、混沌、灵感思维、人体科学、生理、穴位群、生命与健康、征服癌症、农业增产和石油开采等广泛领域中的分形问题作了探讨。书中还介绍了为创立分形论作出重要贡献的诸位科学上的传奇人物。

本书作为大学教材，可供大学师生阅读；为扩大视野，可供中小学教师阅读；作为新学科，特别为科技工作者和社会科学工作者推荐一种新思路新方法。

本书的完成得益于分形界学者和朋友们的优秀研究成果和真诚的支持，支持还来自同仁和我的学生们，谨此表示衷心的感谢！由于时间匆促，难免有不妥与错误，敬请读者指正。

林鸿溢

1992年3月于北京

# 目 录

# 第一章　引　　论

当今，科学技术的发展日新月异，人类对自然界奥秘的认识正在深化与飞跃。世界正经历深刻而巨大的变化。一批崭新的科学概念和思潮正在崛起，并逐步形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展中面临的挑战。分形论（Fractal Theory）诞生在以多种概念和方法的相互冲击和汇合为特征的当代。因此，加深对我们所处的物质世界的认识有助于对分形论的理解与掌握。作为本书的引论，我们将从当代科学发展的特点，非平衡宇宙，大自然的复杂性，到分形论的建立，作简要的阐述。

科学遗产中，至今尚未得到答案的两个基本问题之一，是无序与有序的关系。热力学中著名的熵增加原理把世界描绘成从有序到无序的演变。然而生物或社会的进化却向人们表明，进化的过程是从简单中出现复杂性，生命从低级形式到高级形式，从无区别的结构到互不相同的结构。按照熵增加原理这怎么可能呢？有序结构怎能从无序中得到？研究工作已有巨大的进展，今天我们知道，非平衡是有序的源泉。尚未得到答案的另一基本问题是可逆性与不可逆性。经典物理学和量子力学把世界描绘成可逆的。在这里没有进化可言，动力学给出信息不随时间变化，这与生物的进化，物理过程和化学反应中涌现的不可逆过程的大量事实形成鲜明的矛盾。事实证明正是通过不可逆过程组成了物质，并由此产生活性

物质的概念。

图1-1是雪花图案，美丽典雅，自然之序明显坦露；图1-2是容器中的气体分子，毫无统一的动态特性，处于分子混沌状态，显示了自然界的多样性。

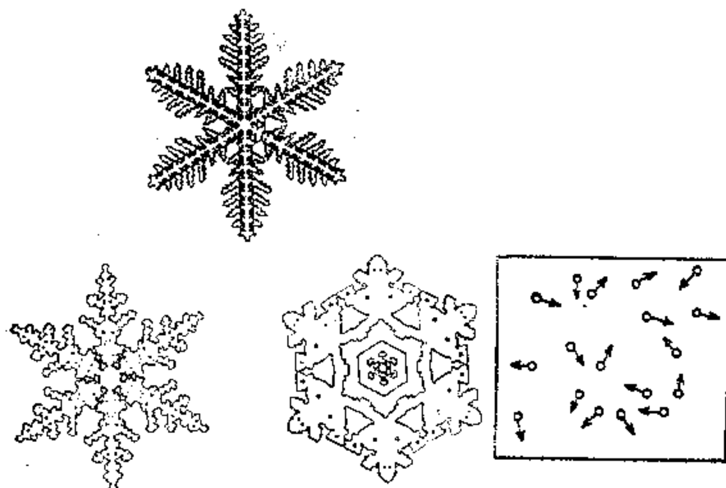


图1-1 雪花图案　　　　图1-2 分子混沌

我们把分形论投入到无序的、涨落的和非平衡的物质世界之中，谨请读者深入研究，提出问题，举一反三，触类旁通，激发旺盛的创造功能。

## §1.1 新学科是怎样诞生的？

我们所处的时代，正面临三个重大的课题，需要我们付出巨大的努力，寻找解决的办法。寻求和探索新的资源，首当其冲；了解人类自身所处的环境，不可回避；与大自然建

立较少破坏性的和谐关系，十分必要。要使这些目标发生质的改变，所需时间的数量级以10年计，正好干预我们这一代与下一代人的生活。这与生物和地质演化过程的浩瀚的时间跨度不可比拟。为达到这些目标，即为了迎接探寻资源，认识环境与改造环境的挑战，科学本身也正处在理论的变革期。对这些目标的认识，存在多种概念和方法相互冲击与汇合。这些概念和方法经历了长期隔离的发展道路之后，突然彼此遭遇，其结果是产生壮观的进展。在这种冲击与汇合的过程中，不同学科间新的界面不断被发现，事实上每一学科的前缘都在大大扩展，因而出现了交叉学科与边缘学科，我们统称为横断学科。其特点是打破了不同学科之间的壁垒，汇合起来，研究共同的问题。例如基本粒子物理与宇宙学，分子生物学与结晶学的合流，就是两个突出的例子。

本世纪之初，物理学家继续以传统的经典观点看待宇宙，处理问题。人们都承认宇宙的基本定律是决定性的和可逆性的，不符合基本定律的事件被认定为例外的人为的产物。现在，我们生活在本世纪之末，越来越多的人通过观察和思索，发现许许多多塑造着自然之形的基本过程是不可逆性的和随机性的。事实上，前者不可能告诉人们关于自然界的全部真情。当人们对周围物质重新进行考察时，抛弃了机械的被动的观点，代之以一种与自发的活性相联系的新观点，这已成为当代的潮流。

今天，放眼望去，人们不难发现物质世界是演变的多样化的与不稳定的，这在不同学科领域得到证实。事实上，在我们生活的这个复杂的世界，既可找到决定性的现象，也可找到随机性的现象；既可找到可逆性的事物，也可找到不

可逆的事物。例如无摩擦的单摆，或月球绕地球的运动轨道等等，就是决定性的可逆性的现象。

单摆是这样一个系统，一质量为$m$的小球固定在长度为$l$的细线的一端，细线的质量比$m$小得多，忽略不计，细线的长度$l$不变，细线的另一端固定，如图1-3所示，这就是单摆的模型。当单摆自然下垂静止时，摆球处于平衡位置$O$点。当将小球略为移离平衡位置，然后释放，则单摆将在平面内围绕平衡位置作往复周期性摆动。假定空气的摩擦阻力很小，忽略不计。设小球在某瞬间通过$P$点向平衡点运动，此时角位移为$\theta$，弧位移为$\widehat{OP}=s=l\theta$，所受的切向分力为

$$f=-mg\sin\theta \tag{1-1}$$

此力为使小球趋向于回到平衡位置的恢复力，所以取负号。小球在$P$点的切线速度为

$$v=\frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta}{dt} \tag{1-2}$$

而切向加速度为

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-3}$$

根据牛顿第二定律，有

$$-mg\sin\theta=ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-4}$$

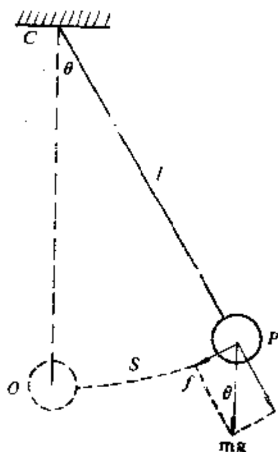


图1-3 单摆

因为$\theta$很小，故可把$\sin\theta$展开为级数

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \qquad (1\text{-}5)$$

略去高次项，代入式（1-4），得到

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad (1\text{-}6)$$

上式实际上是一个谐振方程，式中

$$\omega = \sqrt{g/l} \qquad (1\text{-}7)$$

是单摆摆动的角频率，这里$g$为重力加速度。

我们看到，无摩擦单摆的运动是可逆的，因为在描写单摆运动的方程中，过去、现在和未来是完全相同的。

但是，也存在许许多多不可逆的过程，它们涉及时间的方向性。例如把水掺入酒精，经过一段时间后，这两种液体将混合起来，通过扩散和相互碰撞达到均匀分布，但从来没有见过这种混合液体会自发地彼此分离成为水和酒精，即不存在逆过程。换句话说，这是一类不可逆过程。经过长时间的事件不可能自行重演，这意味着时间有方向性。实际上，人们正越来越多地观察到众多的事实，在所有的层次上，从基本粒子到无限的宇宙，随机性和不可逆性起着越来越大的作用。只有当一个系统的行为具有足够的随机性时，在描述此系统时才可能区分未来与过去，因而才可能形成不可逆过程。

今天我们大体上认为这是很自然的。就达尔文的进化论而言，进化的过程是从简单到复杂，从生命的低级形式到生命的高级形式，从无区别的结构到互不相同的结构。这里也存在过程的时间定向。

但在牛顿构造的世界模型中，时间是没有方向性的。某一时刻，无论是现在、过去还是未来，都被假定与另一时刻完全相同。行星的圆周运行，既可以走向过去，也可以走向未来，因此牛顿系统的时间是可逆的。

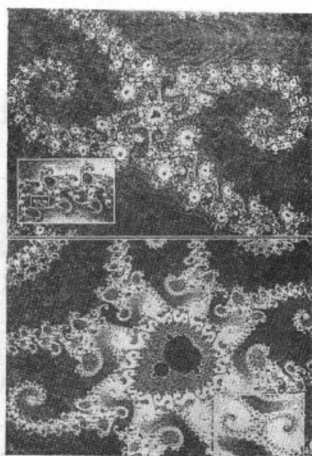
总之，物质世界的绝大部分不是有序的、稳定的和平衡的，而是充满无序、非稳定和涨落的沸腾世界。自然界多得惊人的构型正归因于此。

在一大批崭新的横断学科中，分形论是一支突起的新军。分形论打破了各个学科的壁垒，把思考者从相距甚远的各个学术领域带到一块共同的领地。他们具有共同的敏感性。他们凝视着多变的图样花纹，及其不规则的边缘和突然的跳跃；他们思考着多姿的自然构型；他们探索变幻的自然现象；他们关注着随机性、奇异性和复杂性。请参见图1-4中几幅曼德布罗特集那奇异而复杂的图形。分形论试图透过混乱现象和不规则构型，揭示隐藏于现象背后的局部与整体的本质联系和运动规律。

## §1.2 非平衡的宇宙

量子力学和相对论的确立，是20世纪的两次科学革命，导致影响深远的后果。量子力学和相对论把普适常数：真空中的光速$c$和普朗克常数$h$，纳入经典力学的框架之中，即相对论和量子力学的观点似乎仍坚持牛顿力学所表达的世界观。

量子力学中，在势场$u(r)$中运动的微观粒子遵循薛定鄂方程



($a$)

图1-4　曼德布罗特集（$a$）

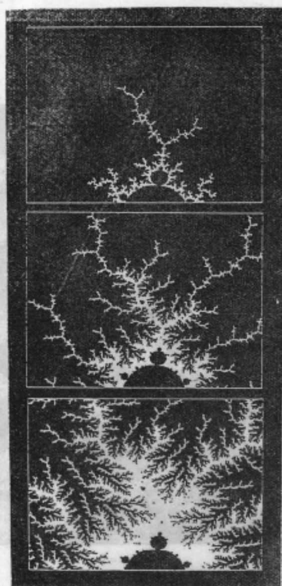


图1-4　曼德布罗特集(b)

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+u(r)\right]\varphi(r,t) \qquad (1\text{-}8)$$

其中$\hbar=h/2\pi$，$m$是粒子的质量，$r$是粒子的位置坐标，右端算符

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2=\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad (1\text{-}9)$$

$\varphi(r,t)$是粒子的波函数。只要知道了在此刻$t=0$时的波函数，则过去和未来的波函数便确定了。而在相对论中，常常使用3维空间加时间维成为4维相空间，强调时间的静态几何性质。

近半个世纪来，情况发生了很大的变化。量子力学已经成为处理基本粒子及其变换的主要工具。相对论也已经受到变革，成为研究宇宙热史的主要工具。

量子力学的创始人之一狄拉克应用量子力学和相对论证明：必须把每一个具有质量$m$和电荷$e$的粒子和具有相同质量和相反电荷的反粒子相联系。我们知道，在高能加速器中已经能够产生正电子（电子的反粒子）以及反质子。由反粒子构成的物质称为反物质。粒子物理学已把反物质作为重要的研究课题。

粒子与其相应的反粒子碰撞时彼此湮灭，产生光子，光子是具有能量$E=h\nu$（$\nu$是光子的振荡频率）而没有质量的粒子。波动方程对粒子和反粒子的交换是对称的。但在我们周围现实世界中，却存在着粒子和反粒子之间的非对称性。

现实世界物质是由电子、质子等基本粒子组成的，而反粒子只是不可多得的实验室产物。如果粒子与反粒子等量共

存，其结果是一切物质全部湮灭。已经证明，在我们的星系中不存在反物质，但并不排斥别的星球存在反物质的可能性。

于是对宇宙机制提出了不同的可能模型，宇宙中可能存在一种机制，有效地把粒子和反粒子隔开，或把反粒子隐蔽在某个地方；更可能是我们生活在非对称的宇宙中，物质完全统治着反物质；物理学家萨哈罗夫（Sakharov）于1966年提出一个模型，其要点是，在物质形成的时刻，宇宙必须处于非平衡条件下，因为在平衡态，根据质量作用定律，要求有等量的物质和反物质。

我们看到，如果不存在非平衡态和与之相联系的不可逆过程，则宇宙将具有完全不同的结构。因为等量物质和反物质的要求，无异于物质的全部湮灭。即使考虑到涨落现象也不会有明显数量的物质，只可能在某些局域物质超过反物质，或反物质超过物质。这并非是现实世界。从现实世界出发得出的结论是：宇宙在物质形成之时便处于非平衡态。非平衡态是物质存在的前提。

## §1.3　大自然的复杂性

### 1.3.1　简单性与复杂性

复杂性与简单性是日常生活中的两个概念，但在一些问题上要区分简单性与复杂性却并非易事，而且往往也不象人们直观想象的那么明显。例如，冰雹和雪花有什么不同？琴弦的振动与心脏的脉动有什么区别？物理过程和化学反应是

否只有由少数规律决定和预见？我们往往以为复杂性总是和生物现象紧密联系，例如语言，人类的大脑都是复杂的。而传统物理学中的现象是简单的，例如物体在重力作用下自由下落，单摆的周期性振动。

让我们来考虑一个“简单”的例子。只要有初等理化知识就知道，当温度为0°C，气压为760mmHg时，1mol任何气体所包含的分子数都等于阿伏加德罗常数$N_0=6.025\times10^{23}$，是一个简单的问题。这相当于1cm$^3$空间里，挤着大约$10^{19}$个分子，一千亿亿个分子！这么多分子在一个小小的空间，在各个方向上毫无规则地运动，不停地互相碰撞。这里我们从一个“简单”的例子，一个从直觉认为是“简单”的体系，引出一个“复杂”的体系，在该体系中不仅有巨大数量的分子，而且其运动不存在协调一致的动态特性，是一个典型的无秩序无规则的体系，称为分子混沌（见图1-2）。分子之间相距超过几埃（Å），就互不相识了。这是由这个分子体系和自然界许多其他体系分子间相互作用力的基本性质决定的，称为分子的短程特性。

实际上，物质世界各种现象作为影响体系的条件一个挨一个共处其中，而这些条件本身又是变化的。可见，物质世界，大自然界确实具有激励人们去追求探索的复杂性。

通过大量观察和各种专门学科的研究表明，简单与复杂，无序与有序之间的距离远比人们通常想象的狭窄得多。周期受力的摆动，已被视为多种运动的组合，还可能包含偏离其平衡位置的随机紊乱振动。一层化学药品的混合液体，是一个普普通通的体系，但在一定条件下可产生出具有时间节奏的空间构型中的自组织现象。也就是说，复杂性本来就

是根植于大自然之中的。

### 1.3.2 物理学中的自组织现象

我们来考察大家熟知的热对流现象，这是一个在不同温度下流体（液体或气体）的整体运动问题。热对流在技术上有众多应用是不必多说的，热对流还是我们这个星球上几种意义重大，场面壮观的现象的基础。大气和海洋的环流，决定着地球上大范围短期和中期天气的变化；地幔的大规模运动诱发大陆板块的运动，即大陆漂移；太阳的热量和物质的传递，并影响太阳自身的活动。在实验室里，只能在很小的装置上研究热对流现象。

本纳德首先完成了用两块水平平板隔开的一层液体（例如水）层中的热对流现象的实验。假设平板的尺寸远大于液层的厚度。当外部条件（如温度）不变时，则液层很快趋于相同的状态，即液层处处完全相同。如果液层中有一极小的观察者在观察自己的周围，他将无法知道自己究竟是处在小体积$V_a$，还是处在小体积$V_b$。实际上液层中的观察者任意确定的所有小体积都将无法区别。因此，知道了其中一个小体积的状态就足以了解整个液层的状态，而且与小体积的大小，形状和位置无关。一句话，观察者无法建立空间的概念。

系统的同一性当然应扩展到系统的全部性质。温度是突出的问题，液层中处处温度相等，而且与平行隔板的温度相同，也与隔板周围的温度相同。这是一个平衡状态。若$T_1$和$T_2$分别为平板1和2的温度，则在平衡态时，有

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 0$$

在实验中若有人把手触及平行板1，则平行板1的局部温

度将发生瞬时变化，是一种扰动。对于平衡态，外界扰动或快或慢将被消除，系统恢复原始的平衡态。称这种状态为渐近稳定的，或称之为近平衡态。

观察者也无法建立时间的概念，因为平衡态的稳定性最终使所有时刻都完全相同。

现在在下板2加热液层，向液层提供能量流，则$T_2$高于$T_1$，$\Delta T>0$，平衡条件破坏了。就是说，当施加外部约束时，系统无法继续保持平衡态。

当外部提供的能流较小，即约束较弱时，$\Delta T$很小时，仍比较简单，只是从下平板2向上平板1传输热量，然后通过上平板向外界传输以保持$T_1$不变，与此同时，压力和液体密度也自下平板（暖区）到上平板（冷区）作线性变化，这就是热传导。由于外部约束弱，所以稳定性将占优势。

当增大$\Delta T$，则系统将偏离平衡态越来越远，当$\Delta T=\Delta T_c$时，液层将突然开始作整体运动，称$\Delta T_c$为临界温度。液体的运动不是无序的，而是呈现一串小“水花”结构(图1-5)，称为本纳德水花，图1-6进一步说明系统运动的复杂性。



图1-5　本纳德水花

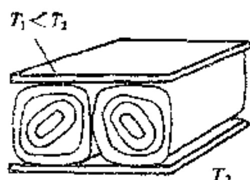



图1-6　水花的复杂性

为什么会产生本纳德水花呢?图1-7给出定性物理解释。因为热膨胀使液层的密度自下而上形成梯度，下平板附近密

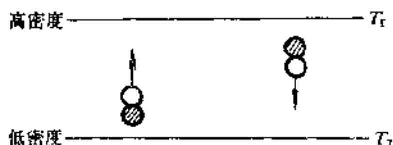



图1-7　本纳德实验的解释

度较小，上平板附近密度较大。假定在下平板附近有一小体积元受到某种扰动作用稍微向上移动了一点儿，而此处较冷，因而是密度较大的地区，于是小体积元将受到一个向上的阿基米得力的作用，而进一步扩大向上运动的趋势，与之相似，若在上平板附近的一小体积元稍微向下移动一点儿，则它将落入密度较小的区域，阿基米德力将进一步扩大它向下运动的趋势。这就是为什么在实验中看到有向上和向下运动的水花。由液体粘滞性的存在，产生阻碍运动的内摩擦，同时热传导总是抵消运动水珠与其环境的温差，这就是存在临界值$\Delta T_c$的原因。

现在再回到小观察者那儿。在小观察者看来，世界完全变了，他可以通过观察所在位置水花的旋转方向判断自己究竟处于何处，当他移动时，通过计算水花个数，能得到明确的空间概念。这就是所谓的对称破缺。空间是由运行于系统内部的功能来赋型的。

系统处于平衡态时，体积$V_a$和体积$V_b$毫无关系。当$\Delta T \geqslant \Delta T_c$时，情况完全不同，似乎每一体积元都在"观察"邻近体积元的行为，"记录在案"，并参与构成整体的运动，这意味着关联作用是长程性质的。本纳德水花的特征空间尺码是$10^{-1}$cm数量级，而分子间作用力的特征空间尺码是在

$10^{-8}$cm数量级。这就是说单个本纳德水花包含大约$(10^7)^3=10^{21}$个分子。虽然每个分子都处于无规则热运动状态，但如此巨大数量的分子竟能以相干的方式运动，这难道不令人感到惊奇吗?!这就是自组织现象的典型例子。

我们已经知道，只要$\Delta T \geqslant \Delta T_c$，水花就会出现。这是决定论所支配的，但是水花的旋转方向却是不可预知不可控制的，只是实验中随机出现的扰动，偶然形成右旋或左旋水花。我们得到决定论与随机性的奇妙协同。

我们看到，在远离平衡态的情况下，体系可以通过多种不同的途径与环境协调。

当继续提高$T_2$，使$\Delta T$超过另一更高的临界值时，系统将突然出现一个新的强有力的随机性形式，结构变得模糊不清，呈现出一个各变量无规则地依时间变化为特征的动态，这就是形成湍流的前兆。湍流是在一定条件下以混沌(chaos)方式演化的物理过程。

湍流、混沌都是物理学的难题，分形将为解开这类难题提供新的可能性。

## §1.4 分形论的建立

### 1.4.1 对自然界的思考

在漫长的岁月中，对自然界的持续思考，使曼德布罗特对自然界和现实世界逐步形成一幅图画，开始是不清晰的未聚焦的映像，大约历经30年的不懈奋斗，终于以奇异而真实的面目出现于世，这就是分形论。分形论的逐步成熟当然是

基于既往一大批科学家的工作，也有今天更多科学工作者的出色贡献，而曼德布罗特的开创性工作最终导致分形论的建立。

曼德布罗特于1924年出生在华沙的一个犹太家庭中，父亲是成衣批发商，母亲是牙科医生。1936年迁往巴黎。他受的教育很不正规，时断时续，他自己说从来没有学过字母表，没有学过5乘5以上的乘法表。他当过车床维修学徒工。然而当他回忆起个人的艰辛历程时，始终记住在学校里与老师成为朋友，其中有几位是因战争而流落的杰出学者。

巴黎解放后，由于他的天赋好，虽然缺乏准备，却通过了高等师范和高等工业学院的严格考试，笔试和口试竟长达一个月，还包括绘画课。他在临摹维纳斯雕像时表现出潜在的灵巧。数学考试他成功地靠几何直觉掩盖了缺乏训练。不管给出什么解析问题，他几乎总可以用脑海中的形象加以思考。给出一个图形，他可以设法变换它，改变它的对称，使它更为和谐。他的变换往往直接导致问题的解决。在此后的学业和工作中，他沿着自己的路走去。由于学术思想上的尖锐冲突，他离开法国到美国居住。1958年，他接受国际商用机器公司（IBM）沃森研究中心的聘请，开始他的异国科学研究生涯。

他孤独地搜寻道路。他尝试过语言学，解释词的一种分布规律，在哈佛大学教过经济学，在耶鲁大学教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学，等等。他自己说过："当我听到过去从事过的一连串职业时，常常怀疑自己是否存在，这些集合的交集肯定是空的。"他在IBM公司工作的初期，主要是研究商品价格，不久碰上公司非常关心的一个实际问题。

工程师们被计算机和计算机之间通讯用的电话线中的噪声问题所困扰。工程师们采用加强信号来淹没噪声的方法，但某些自发噪声怎么也无法消除，而且偶尔会抹掉信号，而造成误差。他提出一种描述误差分布的方式，可以对观察到的模式作出预言。

假设把一天分成小时，可能有一小时无误差，其后一小时可能有误差，然后又可能一小时无误差地通过。随后把有误差的一小时分为20分钟的小段，又可以发现带有误差聚群和完全无误差的期间。但根本不可能找到一段时间，其中误差是连续分布的。在任何一群误差中，无论时间多短，总会存在几段完全无误差的传输。无论是在小时或在秒的尺度上，无误差期间与有误差期间之比总是常数。

曼德布罗特所作的描述，正是以19世纪数学家康托尔命名的抽象构造。康托尔集，我们将在第二章详细介绍。这种高度抽象的描述对试图控制误差是有意义的。分析表明，不应靠加强信号来淹没噪声，而应采用适当的信号为好。

弯弯曲曲的海岸线，蜿蜒起伏的山峦轮廓线，变幻飞渡的浮云，袅袅上升的烟柱，一泄千里的江河，……他反复观察，持续思考，试图从中悟出大自然的真谛。1967年，他在美国《科学》杂志上发表了一篇题为“英国的海岸线有多长?”的论文。他对海岸线的本质作了独特的分析而震惊学术界。这篇论文也成为他自己思想的转折点，分形概念就从这里萌芽生长。

### 1.4.2 分形论奠基

曼德布罗特于1973年在法兰西学院讲学期间，提出分形

几何学的思想，认为分形几何学可以处理自然界中那些极不规则的构型，指出分形几何学将成为研究许多物理现象的有力工具。这个期间他关于分形的思想逐步明朗化，但并未给出明确名字。1975年冬天的一个下午，曼德布罗特正在撰写第一本专著，他注意到物理学领域正在兴起新的潮流，于是他思索着为自己多年来所蕴酿的几何学起一个有别于前人定义的名字。他的儿子刚刚放学回家，曼德布罗特随意翻阅儿子的拉丁文词典。他凝视着由动词*frangere*（破坏）变来的形容词*fractus*，联想到英文中的同源词*fracture*(断裂）和*fraction*（分数），于是创造了*fractal*（分形），这个词既是名词，又是形容词，既是英文，又是法文。今天，这个词已为众多学术界人士所熟悉，并激发了巨大的兴趣。

1977年，他出版了奠基性的著作《分形：形、机遇与维数》(Fractal : Form,Chance and Dimension,Freeman, San Francisco, 1977)，提出了分形的三要素，即构形、机遇和维数。紧接着于1982年又出版了《自然界的形几何学》(The Fractal Geometry of Nature, Freemen,San Francisco, 1982)。这两部著作的发表标志着分形论迈进了现代新兴学科之林。

曼德布罗特的持续奋斗，获得了巨大的成就，赢得了崇高的荣誉。他是IBM公司的高级研究员，哈佛大学应用数学教授，美国国家科学院院士，美国艺术与科学研究院院士。近年来，他获得了许多荣誉奖。获1985年度巴纳德奖，以表彰他以科学造福于人类取得新成就；1986年获富兰克林奖；1988年获科学为艺术奖等。从中我们似乎可以看到分形论所具有的旺盛的生命力。

### 1.4.3 传统学科的困难

从数学发展的进程看，19世纪经典数学研究的对象是欧几里得规则几何结构和牛顿连续动力学体系；现代数学则是以康托尔集合和皮亚诺曲线为标志。这类数学问题不能用欧几里得几何和牛顿连续动力学加以描述。这正是分形几何学产生的土壤。

经典几何学研究的对象是规则而光滑的几何构型。例如一条几何曲线总是处处连续，而且处处可微的。然而，自然界存在着千姿百态的自然构型：连绵起伏的群山，奇形怪状的海岸线，蜿蜒曲折的江河，高度无规的材料裂纹等等。这样一些变化无穷的曲线，虽然是处处连续的，但并非是处处可微的。因此，传统数学无能为力，把这类几何客体排斥在研究对象之外。事实上，数学家早就发现这个问题的存在，早在1875年数学家莱蒙德就指出，存在一类连续但不可微的函数，这使经典数学陷入了危机，于是分形几何学应运而生。

如果有人在若干年前问一位物理学家，物理学能解释些什么？哪些问题至今悬而未决？回答将是简捷的：我们还不能确切地认识宇宙的进化过程和基本粒子的特性。但对介于这两者之间的事物的认识已很令人满意。其实不然，在人类生活的层次，我们刚刚开始认识自然的这个层次。因为事实上在这个层次有许多问题至今物理学也没有能作出解释，如湍流和相变就是两大难题。分形论对这类难题有着独特的见解而有利于洞察问题的奥秘，加速难题的化解。

在化学中高分子化学是重要的研究方向，工业生产部门已形成庞大的高分子产业，为人类创造财富，美化生活。高

分子化学工业生产中，对凝胶形成的机理，凝胶点的确定，凝胶生成的控制，成为高分子学家研究的重要课题。但化学和物理学未能在理论上满意地解决问题。而标度律与分形论为化学家深化对高分子的认识提供了有力的工具。在工业生产中，随着凝胶化的解决，必将进一步推进高分子工业的更大发展。

在地学领域，地震，特别是世界上几次大地震给人类带来生命和财产的损失是十分巨大的。当人们从惨痛的教训中清醒过来时，深深感到准确预测地震的极端重要性。然而既往的理论在这里显得苍白无力，一直未能跨越存在的困难。分形论在地震预测研究的尝试中已取得重要的成果，有可能走出一条新路。

在实际工程问题中，如石油开采，一口油井开采到一定程度后，由于地下油压降低，最终导致无法继续产油，而使油井报废。在实践中人们采取向地下注水的方法以增大压力，继续出油。但是到底需要多大的注水量，多大的水压力，最终将影响继续产油量的多少。这里传统的理论未能作出合理的解释。根据分形论研究的进展，则有可能大幅度地增产石油。

中医治病的神力为世人所公认，但无论是生物学、生理学，还是物理学，都未能对中医的治病原理作出满意的解释。分形论则从人体分形着手进行分析，得出令人耳目一新的结论。所以，分形论引入中医之中，必将有力地推动中医的新发展。

这里只列举不同学科中少量突出的例子，只是说明传统学科确实面临困难和挑战。这正是分形论发展的极好时机。

分形论的拥护者们正以十倍的热情，百倍的努力，从多方面的研究中使分形论臻于完善。其研究动向大体上可以有下列几个方面：（1）分形数学理论的创建与完善；（2）建立分形理论体系，特别是多重分形理论的研究；（3）开拓分形论的应用领域，特别致力于若干传统难题的解决，以及与新材料相联系的分形凝聚研究，等等。

### 1.4.4 分形论及其发展前景

分形的涵义是什么呢？我们暂且不从严格的数学定义出发，而给出一个比较容易为人们所接受的定义。这个定义由曼德布罗特于1986年提出：

分形是其组成部分以某种方式与整体相似的形*。可以展开加以说明，分形是指一类无规则、混乱而复杂，但其局部与整体有相似性的体系，称这样的体系为自相似性体系，也可以是其它形式的相似性。体系的形成过程具有随机性，体系的维数可以不是整数，换句话说，可以是分数，称为分维，记为$D_f$，而分形的嵌入空间，即欧几里得的空间维数记为$d$。

分形思想的基本点可以简单表述如下：分形研究的对象是具有自相似性的无序系统，其维数的变化是连续的。这是目前研究得最多应用得最广的分形，为了区别起见称这类分形为线性分形。从分形研究的进展看，近年来，又提出若干新的概念，其中包括，自仿射分形、自反演分形、递归分形、

---

*：原文为*A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way*。

多重分形、胖分形等等。有些分形常不具有明显的自相似性，正如定义所表达的，局部以某种方式与整体相似。本书只限于对线性分形的讨论。

分形是一个崭新的概念，其思想新颖而独特，正被越来越多的人们所认识和掌握。目前，世界上许多国家都十分重视分形理论及其应用的研究工作，成为众多学科竞相引入的课题。大学里开出分形论课程，得到广大学生的欢迎，认为分形论开拓了人们洞察客观世界的眼界。许多学术刊物陆续刊登有关分形的论文。据美国科学情报研究所的计算机显示，世界上1257种权威学术刊物，在80年代后期发表的论文中与分形有关的文献占37.5%。从新发表的越来越多的论文中，可以看出，这一新概念涉及哲学、自然科学和社会科学，并将对各学科产生重大的影响，以新的驱动力有效地推动各学科的新发展。

国内分形研究工作处于起步阶段，许多学者都认为分形是一个很重要的课题，并为之付出巨大的努力与热情。所以，研究波及面大，进展迅速。1989年4月曾由中国科学院国际材料物理中心举办“材料中的分形春季学院”，有力地推动了国内分形论研究的开展，同年7月，由四川大学、北京大学、武汉大学、中国科技大学和复旦大学等发起，在成都召开了我国第一届分形理论与应用学术讨论会，出版了论文集。从发表的论文看，这项关系重大的研究工作在我国发展的特点是理论与应用齐头并进，一开始就注意到理论基础与实际应用问题相结合，因而更显示出巨大的生命力。例如在农业增产、探矿、地震预报、石油开采、新材料制备和生物医学等领域都有可观的进展。

事实上，人们一旦接触到这一新概念，就会被其崭新的概念新颖的思想所深深吸引，而投身于这项十分有趣味，又大有应用前景的研究工作之中。

分形论及其应用受到多方面重视是理所当然的，因为分形现象在自然界和社会活动中广泛存在，从已经发表的论文所涉及的领域就可以清楚地看到其应用遍及哲学、数学、物理学、化学、冶金学、材料科学、表面科学、计算机科学、生理学、心理学、人口学、情报学、经贸、管理和商品学，甚至在电影、美术和书法等等领域也得到应用。

分形论作为一种新理论要进一步发展，更加臻于完善；分形作为一种可以应用于众多领域的新方法，必将为更多的人所认识，得到更加广泛的应用，而产生深远的影响和巨大的作用。

正如美国著名物理学家惠勒所说："可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人！"总之，在世界正经历着深刻而巨大变化的当今，分形论将为满足人们开拓视野，启迪思维，更新观念，激发智慧的强烈愿望作出应有的贡献。

# 第二章　分形论及其领域

分形论在发展历程中，从大自然汲取丰富的养料，使内涵与日俱增，不断充实，已经从其独具特色的分形几何学起点走向广义分形论，并在众多学科领域施展其洞察事物本质与运动规律的巨大潜力。

本章将从各种不同的领域中去发现其共性，从而阐明分形体系的基本性质，包括分形的产生，自相似性及研究领域，也就是回答“分形有什么用？”的问题。

## §2.1　云彩、地震和血管

在生活中，当人们思考一件事物时，往往要问：多大？多久？这对人们把世界概念化来说是基本问题。这里包含区分和描述事物特征的两个基本性质，也就是事物的形状大小和事物持续的时间长短，即空间尺度和时间尺度。动物的结构总是与其特征尺度相关联。设想在比例保持不变的情况下，把一个人的尺寸放大到两倍，则这个结构的重量将会把骨骼压垮。可见，尺度确实十分重要。

地震行为在相当大程度上与尺度无关。大地震是小地震按尺度放大的结果。显然，从特征尺度来说，地震不同于动物。因为10cm长的动物的结构必然不同于1cm长的动物的结构，而100cm长的动物需要有更不同的结构，才不致于在

质量增加的情况下发生骨折。但云彩与地震一样可以有尺度变换关系。在不同的尺度下观察时，云彩特有的不规则性完全相同。因此，空中旅行者通过机窗眺望云彩时，无法判断其远近。分不清50m外的云彩与1000m外的云彩。

人体血管，从主动脉到微血管，形成连续网络。它们分支再分支，直到细得只能允许血细胞排成单行移动。图2-1是心脏血管的分形结构。对生命来说，血液是十分宝贵的，有限的人体空间也十分宝贵。因此，血液循环系统必须把巨大的表面积挤进有限的体积。人体的自然构型十分精细，以致在众多的器官组织中，没有一个细胞与血管的距离超过三四个细胞之远，虽然血管遍布全身，但血管（动脉和静脉）与血液只占人体很小的空间，不超过5%。人体内动脉与静脉缠绕网络的复杂性远非特例，在消化道里，组织表面波纹夹着波纹，绒毛的逐层分支。在肺脏同样把最大可能的面积装进最小的空间。肺脏吸收氧气的本领大致与肺的表面积成正比。人肺的表面积展开之后比网球场还大。肺的导气管类似于计算机所产生的分形。肺的支气管与细支气管形成一棵有多代支系的树。气管的小尺度分支与大尺度分支看起来相似，具有分形性质（图2-2)。气管的迷宫还必须高效地与动脉和静脉交织起来，形成极为复杂的结构。

尽管云彩变幻莫测，极不规则；给人类带来灾难的地震难于预测；人体循环系统（血管和消化道等）的缠绕嵌套，奇异无穷；……它们分属不同学科领域，但是，它们却具有共性：自相似性，即分形特性。借助分形论的深入分析可以揭示其共同的规律性。

甚至心脏跳动节律的频谱与地震和经济现象一样，也遵

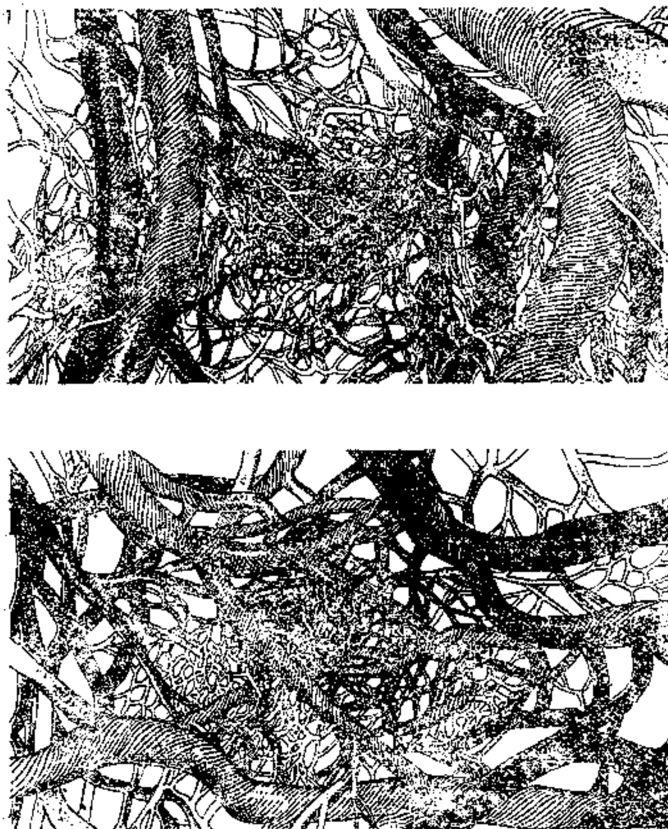


图2-1　心脏血管的分形结构

从分形规律。美国军方和杜邦公司经多方探索最终得以生产鹅绒的人工合成品，也是因为理解了天然鹅绒非凡存气的功能是来自羽绒关键的角蛋白的分形结点和分支。

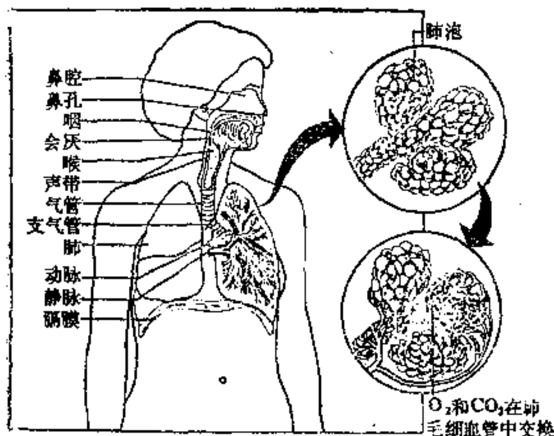



图2-2 肺脏导气管的多代支系

## §2.2 自相似性

自相似性是重要的分形原理，表征分形在通常的几何变换下具有不变性。自相似性并非新概念，早在1926年，理查逊就曾指出，湍流在很大尺度范围内可以分解为许多漩涡。

在哲学领域中，许多哲学家的观点尽管有很大的不同，但它们却共同认定，相似性是认识论和方法论的重要课题。

门捷列夫元素周期表，是根据自然科学基本定律化学元素周期律而提出来的，是以化学元素相似性为基础的。法国化学家热拉尔以结构相似性为基础提出类型论，把当时已知的有机化合物分别纳入水、氯化氢、氨和氢四种基本类型。这四种母体化合物中氢被各种基取代，可得到各种有机化

合物。

物理学中的相似性定理被广泛应用于空气动力学、流体力学以及飞机、船舶、火箭和桥梁技术中，取得了巨大的成功。

生物学中，达尔文从动物和植物发展过程中存在相似性现象入手创立了进化论。当生物研究发展到分子层次的今天，发现其结构与结晶学的研究对象是相似的，于是分子生物学与结晶学汇合同流。

心理学则从人类思维活动的大量实验和统计中确认了人的思维活动主要是依据相似性进行的。尽管存在不同学派，有着不尽相同的提法，如“相似块”、“行为模仿”等等。但可以看出，心理学家们都在不同程度上承认人的思维活动是以相似性为基础的。

计算机科学中，以相似性为基础的模型学和仿真技术产生巨大的经济效益。

在宇宙中，小至基本粒子，大到行星和太阳，其运动过程存在着惊人的相似。正如协同学的创始人哈肯所说：在太阳系中没有任何新的东西。我们的确发现，相似性在很多现象中都存在，只是明显程度不同而已。

为什么从微观到宏观运动存在相似性呢？主要原因归结于宇宙间存在的四种作用力的相似性。客观物质相互作用是通过交换相似粒子实现的。引力交换引力子，库仑力交换光子，强作用力交换介子，弱作用力交换波色子。由于力的相似性就使得物质处于稳态时结构上的相似性，而结构的相似性进一步呈现出功能的相似性。

在了解相似性在物质世界普遍存在之后，让我们来回顾

一下曼德布罗特关于"英国的海岸线有多长"的论述。这似乎是个很简单的问题，但并不容易明确回答。其答案依赖于测量时所用的尺度。也就是说，曼德布罗特的答案是，海岸线的长度不是唯一确定的。

这里作一具体考察，如果用公里作测量单位，那么，那些几米或几十米的弯曲就被忽略了，这时测量的长度为$s_1$，当改用十米作测量单位时，那些一米到几米的曲折便被忽略了，这时测量得到的长度为$s_2$，显然$s_2$大于$s_1$；如果再改用一米为单位，例如由测量人员沿海岸线行走来测量，则海岸线的长度等于步长（一米）乘上步数。由于测量尺度比前两种情况小得多，必然测量到比前两种情况小得多的弯曲，这时所测得的长度为$s_3$，必然有$s_1 < s_2 < s_3$。如果要更精细的测量，例如可以用绘图的圆规进行测量，自然会测量到更小的弯曲，海岸线长度的测量结果$s_4$当然比前面各种情况都要长。假如还要更精细，那不过于海岸线上沙石的原子和分子的大小，则长度的测量结果将是天文数字。总之，对测量对象越贴近，越精细，那么发现的细节就越多，因为每一既往层次都包含着下一相继层次许许多多更小的细节。

自然界有许许多多类似海岸线的曲线，它们的共同特征是极不规则，极不光滑。当我们接近这些研究对象时，就会在不同的接近层次上，即越来越小的范围上发现同等程度的不规则性，同等程度的复杂性。由于这样一些曲线捉摸不定，被数学家视为"病态曲线"或"妖魔曲线"，而屏弃于传统数学研究对象之外。

当代科学技术突飞猛进，日新月异，人类对物质世界的认识已经有了很大的变化。随着信息时代的到来，电子计算

机的广泛应用，人们开始对所谓病态曲线进行深入的研究和科学抽象，结果发现这类曲线具有一个共同的重要性质，即曲线的局部形态与整体形态相似，称为自相似性。也就是说，在不同的放大级别上，曲线的形状是相似的。图2-3是计算机产生的海岸线，细节是随机的，但分维不变，因此无

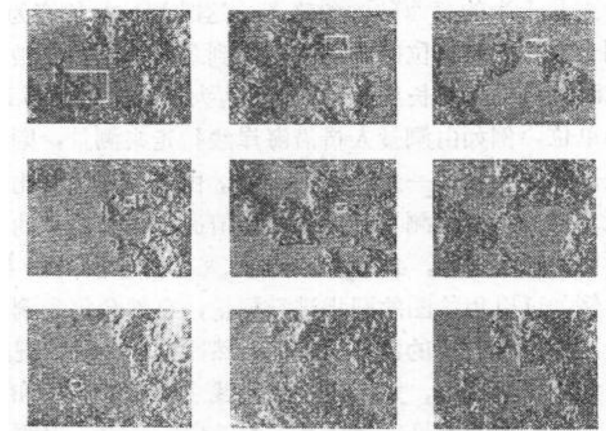


图2-3 分形海岸

论把图像放大多少倍，粗糙和无规则程度相似。在没有参照物的情况下，在空中拍摄100km长的海岸线与经过放大的10km长的海岸线，这两张照片是相似的。事实上，具有自相似性的图形在自然界广泛存在，比比皆是。

必须特别说明，上述这类具有自相似的曲线及其他具有自相似的事物，实际上是在统计意义上的自相似性（渐近自相似性，随机自相似性）。这类自相似性的特点是存在于一定标度（尺度）范围内的，其两端常受到某种特征尺度的限制。具有自相似性的范围称为无标度域。在以后我们还要再

论无标度域，这里就不详述了。

标准的自相似性分形是数学家们精心构造出来的，纯粹而漂亮，可以不断推演下去以至于无穷。这样的分形在庞大的分形家族中只是少数，凤毛麟角，大量存在的是随机分形。

自相似性思想可以追溯到遥远的古代。《周易》中有“无极而太极，太极生两仪，两仪生四象，四象变八卦”。老子《道德经》中说，“天下万物生于有，有生于无。道生一，一生二，二生三，三生万物。万物负阴而抱阳，冲气以为和”。《黄帝内经》中有“五脏六腑之津液尽上渗于目”，“耳者，宗脉之所聚也”。古代哲学中，“一沙一世界，一花一天国；袖里有乾坤，壶中有日月”之说。这些都与分形思想相一致。

曼德布罗特从自相似性的古老神话中，看到新的应用领域，并指出自相似性广泛存在而并非偶然出现。图2-4显示了曼德布罗特集的自相似性。

## §2.3 分形元与分形子

我们已经知道，分形体系的局部与整体是相似的。实际上，分形体系内任何一个相对独立的部分，在一定程度上都是整体的再现和缩影。构成分形整体的相对独立的部分称为生成元或分形元。无论在生成元的反复操作下最终形成多么复杂奇异的分形体系，整个体系始终局限在初始$[O,R]$区间内。称线段$\overline{OR}$为初始元。图2-5是蛋白质分子链的分形模型。我们将看到从分形元出发产生复杂而奇异的形态。只要

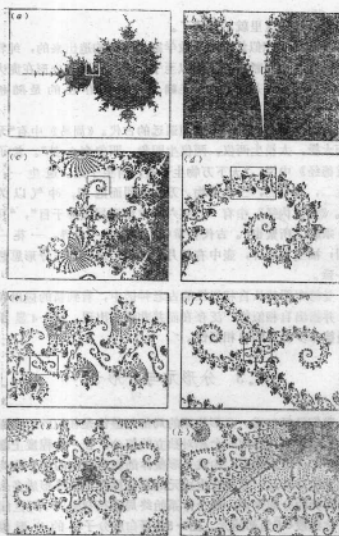



图2-4 奇妙的自相似性

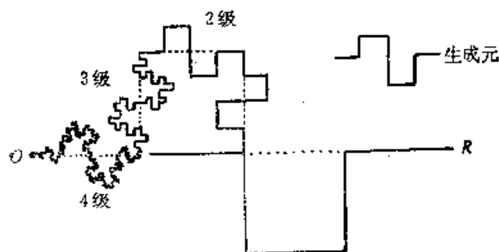



图2-5　蛋白质分子链的分形模型

给定一个分形元，按一定规则无穷尽地操作绘制，就可以创造出花样繁多，五彩缤纷的分形图像。若包含随机因素，进行适当操作，则最终获得的分形图像，其复杂性和奇异性将令人惊叹不已。简单一些的可以手工绘制，复杂的则需要借计算机来完成。

自然界任何物质内部都包含有大量的原子和电子，它们之间存在较强的相互作用，也就是存在较强的关联性。物质内部的微观过程涉及数量级为$10^{-29}m^3$的原子和电子的集体运动。这是极其复杂的多体问题。例如一块金属铜，其内部杂质、缺陷和外界条件（包括温度和辐射等）又影响着原子和电子的集体运动，使固体内的原子和电子处于或高或低的激发状态。所以，固体的宏观性质，实际上是处于激发态的固体中原子和电子集体运动的总体现。理论研究表明，固体中的激发态是由一些基本的激发单元组成，它们具有确定的能量量子和相应的准动量，即具有量子的特性。这些基本的激发单元称为元激发。所以，固体中的元激发实际上是描述固体中微观粒子在特定的相互作用下产生的集体运动状态的量子。在许多情况下，元激发又可用准粒子来表示，每一个

元激发相当于一个准粒子，具有确定的能量和准动量。

在凝聚态物理中，为了解释分形的振动性质，提出分形子，代表分形体系中的元激发。分形结构的振动性质可由频率$\omega$来表征，并引入独立的维数，即分形子维，也称谱维，记为$\tilde{D}$。

至此，已经有三个独立的维数，即欧几里得维$d$，分维$D_f$和谱维$\tilde{D}$。我们将在第三章对分维$D_f$作仔细阐述和讨论，这里给出谱维$\tilde{D}$的定义。

由固体物理知道，在欧几里得空间，具有周期性的空间晶格结构中，频率为$\omega$的声子态密度为$\rho(\omega)$，在低频端有

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d-1} \tag{2-1}$$

式中$d$为欧几里得空间的维数。对具有自相似性的分形结构，应用标度理论是合适的数学工具，因为可以预期物理性质与有关长度大小的幂次成比例。就是说在这里可以得到与式(2-1)类似的式子

$$\rho(\omega) \propto \omega^{\tilde{D}-1} \tag{2-2}$$

式中$\tilde{D}$为谱维，即分形子维数。

## §2.4 自然分形与社会分形

### 2.4.1 广义分形

分形论的自相似性概念，最初是指形态或结构的相似性。也就是说，在形态或结构上具有自相似性的几何对象称为分形。研究这种分形特性的几何称为分形几何学。它是曼

德布罗特创立的。而后随着研究工作的深入发展和领域的拓宽，又由于一批新学科，如系统论、信息论、控制论、耗散结构理论和协同论等相继涌现的影响，自相似性概念得到充实与扩充，把信息、功能和时间上的相似性也包含在自相似性概念之中。于是，把形态（结构），或信息，或功能，或时间上具有自相似性的客体称为广义分形。

广义分形及其生成元可以是几何实体，也可以是由信息或功能支撑的数理模型；分形体系可以在形态、信息和功能各方面同时具有自相似性，也允许只有其中某一方面具有自相似性；分形体系中的自相似性可以是完全相同，这种情况是不可多得的，也可以是统计意义上的相似，这种情况占绝大多数；相似性有层次或级别上的差别。级别最低的为生成元，级别最高的为分形体系的整体。级别愈接近，相似程度越好，级别相差愈大，相似程度愈差，当超出某一范围时，则相似性不复存在。这涉及将在以后的章节中阐述的无标度区域或标度不变性范围问题。

在自然界、社会和思维领域广泛存在分形现象，所以，分形论已被引入众多学科领域，为各有关学科提供新颖的思路和有用的新方法。

分形论的研究领域大体上分为两大类，即自然分形与社会分形。

### 2.4.2　自然分形

自然分形所涉及的范围极广阔，内容十分丰富。遍及数学、物理学、化学、材料科学、表面科学、计算机科学、电子学、微电子技术、生物学、生理学、医学、农学、天文

学、气象学、地理学、地质学和地震学，等等。总之，自然界客观存在的或经过理论抽象的，具有自相似的客体，称为自然分形。

当对具有自相似性的具体系统进行分形分析时，根据系统的具体特点，又可以分为几何分形、功能分形、能量分形、信息分形和重演分形等。

自相似性表现在系统的几何结构和形态上的，称为几何分形。如具有线状缠绕的高分子链为线状分形，具有表面自相似结构的催化剂表面，为表面分形，材料制备过程中形成的凝聚团具有体积分形的特性等。

在功能或信息方面具有自相似性的客体，分别称为功能分形或信息分形。这两方面研究的领域十分广阔，从植物生长到人类发育，从都市边界线的变迁到气象预报，都关系到功能和信息的分形性质。一个胡萝卜的根细胞可以培养成一株完整的胡萝卜。人类的一个受精卵可以在母腹中发育成一个人。可见细胞是一个分形元，它内涵着整体的全部功能和信息。都市边界线的变迁则记叙了城市历史演变的信息。气象预报的计算机输出波形反映了成千上万条信息的结果。中医的人体穴位群，在功能和信息上是人类各个器官的缩影。针灸治病的原由就在于此。

无线电通信中的能量传输和地震波的传播等能量传递过程存在着自相似特征。能量传播方面存在自相似性的系统，称为能量分形。

系统在演变过程中，在时间轴上具有自相似性质称为重演分形或时间分形。如生物学中的重演定律就是重演分形的典型例子。实际上，整个有机界的发展史与个别有机体的发

展史之间都存在着惊人的相似。太阳黑子爆炸，地震周期重演等，都是在时间轴上表现出系统发展和演变的自相似性。

### 2.4.3 社会分形

社会科学是研究人类社会各种文化现象的。社会科学从来十分关注自然科学的新理论和新成就，常常乐于吸收自然科学领域提出的新概念和新方法。当代一大批新科学先后问世，分形论是最年轻的一支新军。分形概念已走出自然科学的天地，触角伸向广阔的社会科学领域。社会科学的学者们十分敏感于这一新兴学科的新颖思想和独特的方法，很快被引入到广阔的社会科学领地，作为社会科学定量化和现代化的新方法和新途径。

#### 1. 经济学中的分形

曼德布罗特首先将分形概念引进经济学。早在1963年他就注意到市场商品价格的变化与分形之间的关系。发现价格变化与时间之间有一种不寻常的函数关系，显示出统计自相似性质。由此，他求得19世纪棉花价格变化的分维$D_f = 1.7$。他还研究了利润变化、股票市场的行情记录，居民的收入及资本和财产的分布等经济问题。他得出的结论，是所有这些问题都与分形有关。最近，有人对近期欧洲证卷价格和利率变化作了研究，其结论是仍可以用分形的语言加以描绘。

经济弹性是经济学的基本概念。它表征经济系统变量变化之间的相互影响关系。弹性具有分维性质，是由于它揭示了经济系统中某些参数变化所表现出来的自相似性，及参数变化之间的不规则性和复杂性。

在这里，把分维看作随观测尺度（标度）变化的函数，

定义分维为

$$D_e = \frac{\mathrm{d}\ln N(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln \varepsilon} \tag{2-3}$$

在经济学中，一个变量$y$可以表示为另一变量$x$的函数，即可以写成$y=f(x)$，则$y$关于$x$的弹性定义为

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}y/y}{\mathrm{d}x/x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{x}{y} \tag{2-4}$$

显然有

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}\ln x} = \frac{\mathrm{d}\ln f(x)}{\mathrm{d}\ln x} \tag{2-5}$$

比较式(2-3)与式(2-5)，有

$$\sigma = D_e \tag{2-6}$$

即经济弹性$\sigma$与经济弹性分维$D_e$相等。所以，经济弹性刻画了用自变量$x$作标度单位去度量因变量$f(x)$时，所表现出来的某种不规则和依赖程度。

假定$N$是社会的商品产量，$\varepsilon$是社会有效需求，则根据式(2-3)，表示用$\varepsilon$作为标度时，全社会的商品总产量所呈现的某种不规则程度。凯恩斯学派认为社会商品产量$N$完全由社会有效需求$\varepsilon$决定，这是决定论的观点；而理性预期学派则认为社会商品产量$N$完全不能由社会有效需求$\varepsilon$决定，是一种随机性观点。分形论则认为社会总产出与社会总需求的关系是非常复杂的。既不是完全决定性的，也不是完全随机性的，而是介于两者之间。它们的关系可能是周期的，也可能出现某种混沌局面。当今资本主义世界的“滞涨”局面，实际上就是这种混沌现象的实例。

经济弹性分维$D_e$刻画了社会总产出关于有效需求的某种

不规则程度，或混沌情况。所以可以从$D_0$的大小来判断整个社会的经济形势，从而采取相应的经济政策。当$D_0$较小时，说明社会总产出关于社会有效需求的不规则程度较小，因而刺激有效需求对社会总产出的影响程度较小。这种情况下，经济部门不应该刺激需求，而应在供给方面挖掘潜力；当$D_0$较大时，说明社会总产出关于社会有效需求的不规则程度较大，因而刺激有效需求对社会总产出的影响较大。在这种情况下，经济部门可以采取刺激需求的政策，从而使生产得到发展。

又例如需求——价格弹性，根据分维的意义，可以理解为商品需求量与价格之间变化的不规则程度。其规律是生活必需品、日用品和一般劳务的需求与价格变化之间的分维值$D_0$较小；而非必需品、奢侈品、娱乐品和特殊劳务的需求与价格之间变化的分维值$D_0$较大。说明前者不规则性较小，后者则较大。

对系统的某些变量随时间而演化的关系进行跟踪记录就得到该变量的时间序列，分析时间序列就可以得到系统的动态性质。经济系统的时间序列通常具有较强的时滞性和非线性效应。即经济系统所表现出来的长程相关性或长程记忆性。这也就是用不同的时间标度去观察系统时，表现出统计相似性，即经济分形。

**2．思维分形**

思维是人对事物的认识过程，是人类大脑的特殊功能，是人同客观世界相互作用中的信息增殖。思维是人类智慧的源泉。恩格斯把思维称为“地球上最美丽的花朵”。思维科学是研究人的有意识思维的特点、规律、历史和模拟的科

学。由于人类在认识和意识上具有自相似性特征，所以称之为思维分形。人类社会存在错综复杂的交往联系，所以每个人的思维都反映周围许多人的思维，他们每个人又反映别人的思维，是一个无穷无尽的序列。也就是说，每个人的思维都在某种程度上反映了整体的思维。人类每个健全个体的认识过程，都是人类进化史的简略而迅速的重演。

思维科学的研究方法有内省法、微观法和模拟法等。内省法是自己考察自己的思维过程，即以自己的思维作为研究对象，用现代技术手段研究思维过程；微观方法是以人类大脑的砖石——神经元为对象进行分析研究。人脑约有5000万种神经细胞，细胞总数约1000亿个。(图2-6)显示神经元的分形结构。细胞体分支成树突，树突又分成更细的纤维。这种结构可能与神经系统的混沌有关。研究每个神经元在思维过程中的电化学变化，及其在思维过程中的作用机制，从微观层次上认识思维的规律，这些都是微观方法的研究内容；模拟方法是通过模拟大脑的结构，研究人工智能的途径和技术。人工智能是人的思维的物化、模拟和复制。模拟是以相似性原理为基础的。



图2-6　神经元

开展思维科学研究有着十分重要的意义。通过对思维过程的深入认识将充分发挥人类大脑的

潜力，使人们自觉按照思维规律办事，更好地发挥大脑的创造性功能。其次，思维科学的发展将推动科学技术的发展。例如抽象思维的发展将为新一代电子计算机的诞生提供理论依据。此外，思维科学的发展还将为哲学提供新的资料。总之，对思维科学的深入研究将深刻揭示人类大脑活动的本质和规律，并将推动科学技术和哲学的新发展。

随着对形象思维研究的深入发展，提出相似论的观点，把人们在学习中和实践活动中积累起来而贮存在大脑中的知识单元称为相似块。人们对外界认识过程中，常常要依赖于它的存在。客观对象只有与大脑中已有的概念和存贮的信息，即相似块相互和谐共鸣才能产生美的感受。在思维过程中，相似块相互作用，不断排列组合深化，思维内容逐渐丰富，产生“整体大于部分之和”的创造性思维。

灵感思维具有偶然性、突发性和创造性。根据这些特点，可以借助分形论，用计算机对思维过程进行模拟。研究表明，其机制与相变和渗流模型有共同点。有关相变和渗流的理论将在以后的章节中讨论。

灵感思维的特征是人同客观世界相互作用中信息的高速增殖。灵感思维可以有不同的类型。

1° 原型启发。一个人长期钻研、思索某一问题，当百思不得其解时，突然受到某一具体形象的启发，茅塞顿开，使问题得到化解。公元前3世纪，古希腊物理学家阿基米德，在入浴时看到水从浴缸往外漫溢，并感到身体向上漂浮，而突然大叫“解决了！”因而发现浮力定律。我国战国初期的鲁班受草叶划破手指的启发，发明了锯子。

2° 注意转移。意大利物理学家费米发现量子物理中著

名的费米统计是他和另一位物理学家一起舒坦地躺在寂静的草地上，准备捕捉壁虎时，骞然从心灵深处寻找出来的。英国科学家布朗发现，浴盆、床铺和在农村小路上散步最适宜产生灵感。法国物理学家、数学家庞加莱在进行一段紧张的数学研究之后，决定驱车到乡间旅行，不再想工作了，当他的脚刚刚踏上刹车板时，突然想到，他用来定义福克斯函数的变换方法同非欧几何的变换方法是完全一致的。物理学家、诺贝尔奖获得者杨振宁曾风趣地谈到，他的一些灵感是在刷牙时产生的。所有这些例子都说明，恰恰就在人们没有正面思考某一问题时，将注意力转移到旅行、散步、洗澡、刷牙、睡觉的时刻，突然"顿悟"了，在顿悟的一刹那间，能够奇迹般地将两个或两个以上互不相关的概念串连在一起，借以解决一个搜肠刮肚不得其解的难题，甚至导致科学上的新发现。

3° 意外机遇。16世纪，荷兰有个磨眼镜的徒工里波斯在闲玩时，用一前一后两个透镜观看各种景物，他意外地发现，当两个镜片离开一定距离时，远处物体看起来就象在眼前一样，从而创造了第一架望远镜。伽里略得知这个消息后，凭着他深厚的科学积累和远见卓识，敏锐地意识到这个意外发现在天文学上的巨大意义。他很快掌握了其原理，并制造出放大倍数达30倍的望远镜，用它观察星空，发现了许多新的天文观察事实，这些事实成为哥白尼学说的重要证明。

镍铬合金钢是工业上的重要材料，是一种抗腐蚀的重要不锈钢，诞生于1913年，是在无意中从废品堆中发现的。

类似的机遇还发生在与同行或外行的自由交谈中，阅读

文献中，撰写文章中，或一次演说中等等，都有可能成为一种诱发因素而产生灵感，就象火镰敲打不同火石一样，迸发出同样绚丽的火花。

灵感是一种思想闪光，是在一定条件下积极思维活动的结果。

利用时间序列分析方法测定人的脑电波的分维，尝试以此来探索思维的奥秘。事实上，大量社会现象所表现出来的统计自相似性正是思维具有分形性的有力佐证。分形理论在思维科学中的应用，将有助于推开神秘莫测的思维大门。

**3．情报分形**

情报是普遍存在的一种社会现象。情报学的诞生是当代科学技术突飞猛进，知识不断地迅速更新的产物。情报学是研究和分析情报的搜集、整理、加工、存贮、检索、传播和报道等方面的理论和应用的科学。

美国著名语言学家齐普夫作了大量统计分析，确立了齐普夫词频分布定律：

$$g(r)=Cr^{-1} \qquad (2-7)$$

式中$g(r)$是较长文章中每个词出现的频率，$r$是与$g(r)$相对应的赋与词的序号，$C$为大于零的常数。英国语言学家朱斯将(2-7)式加以推广成为

$$g(r)=Cr^{-d_z} \qquad (2-8)$$

式中$d_z$为齐普夫指数。式(2-8)较式(2-7)更为一般，适用于更宽广的领域，已经在情报学和档案学等社会科学领域得到广泛应用。但在对词频分布定律进行理论解释，寻找其数学背景的众多研究工作中，未能得到令人满意的结果。曼德布罗特对词频分布定律作了理论分析，讨论了指数$d_z$的意

义，认为词频分布具有分形性质，并把式(2-8)写成

$$g(r)=C(r-a)^{-d_z} \tag{2-9}$$

式中引入辅助性常数$a$，以便满足低频词的分布规律。这里$d_z$与分维$D_f$的关系为

$$d_z=1/D_f \tag{2-10}$$

分析实例表明，$d_z$是词频分布分散程度的定量描述。故可称$d_z$为齐普夫分维。$d_z$大，表明词频分布较分散，即大多数词出现的频率相差不大；$d_z$小，反映词频分布较集中，即词出现的频率相差较大，作者在文中使用了一些不太常见的词。式(2-7)是$d_z=1$的特殊情况，在许多场合下，它对中频区的词频分布符合较好，而在高、低词频区$d_z$可能小于1或者大于1，表现出不同层次的统计自相似性。词频分布表现出统计自相似性是人们偶然性、随机性行为与有目的的确定性行为在著作中综合和谐的表现，可能是人类头脑思维活动具有分形性的具体体现。

揭示科学家科技生产率频率分布的洛特卡定律是情报学的另一著名经验定律，它是由曾担任过著名杂志《科学美国人》副刊编辑、美国人口协会理事长和美国统计协会理事长的洛特卡于1926年提出来的，数学表达式为

$$N(x)=Cx^{-D_f} \tag{2-11}$$

式中$N(x)$是一定时间内在某一学科或主题中，撰写了$x$篇论文的著者数（或著者频率），$C$和$D_f$是大于零的常数。当时洛特卡给出$D_f=2$，即所谓反平方法则。而后，人们对这一经验定律作了大量研究，但都未能作出圆满的解释并上升为理论。分形论则指出，常数$D_f$具有分维意义，它表征了用论

文数作尺度来衡量著者分布的统计自相似性的特征，是著者分布分散程度与学科（或主题）相互渗透水平的定量指标，这正是洛特卡定律的核心所在。$D_f$随学科或主题的不同浮动于1.2至3.7之间。这为情报学的定量化研究开辟了新的途径。

情报工作已形成巨大的系统，情报的搜集、检索和传递等在一定程度上具有统计自相似性，情报机构网络在某种意义上也是一种分形结构。用分形模型加以研究可提取有用的规律，情报系统的设计、组织管理，情报的度量和情报基础理论的完善等，分形论都将提供有力的分析手段。

**4. 管理科学中的分形**

管理科学有着十分丰富的内涵，是一门横跨自然科学与社会科学的综合性学科。它不仅涉及生产关系和上层建筑，而且涉及生产力的组织管理和利用。这里简要讨论管理的组织模式及城市的管理布局问题。

在管理科学中，从微观到宏观，从程序化到非程序化，从垂直到交叉，在组织、方法和手段上都表现出层次、结构、功能和信息的相似性。从局部管理到整体管理，从低级管理到高级管理，从经济财务管理到行政科技管理等，也具有自相似性。"以点带面"，把点的经验推广到面上去。这种事半功倍的管理方法与分形论的自相似性原理不谋而合。可以认为，分形论将成为管理科学的基础。

本世纪以来，世界城市化的进程逐步加快。世界城市人口占总人口的比例从1920年的23.6%上升到1981年的42.2%，目前上升趋势仍在继续。城市的高速发展，带来交通拥挤、环境污染、社会治安等许多问题。所以，城市的管理规划已

成为全社会所瞩目的问题。分形是大自然赋予的优化结构，用分形原理来管理城市是近年来崛起的一个新分支。研究发现，城市边界、城市商业网点、生活服务设施、房屋建筑、道路分布……在一定程度上都满足分形结构。而且在一个大的地区范围内，各类城镇的分布和结构也具有统计自相似性。

5．艺术分形

音乐、美术和文学是人类智慧的产物，反过来又作用于人类，成为人们精神生活的组成部分。听一首悠扬悦耳的乐曲，看一件赏心悦目的工艺品，读一篇生动感人的诗作，令人如饮甘醇美酒，回味无穷。艺术的感染力是令人惊叹的，而分形艺术更令人陶醉。在音乐、美术和文学中，随时都可捕捉到分形的踪影。如分形山脉、分形云彩、分形湖泊和分形树林等，其技术之高超，几可乱真。曼德布罗特以“分形艺术与科学和工业相互渗透”的应征文章赢得1988年度科学为艺术奖。该奖表彰他在促进艺术、科学和工业之间相互渗透方面的重大科学创新。可以相信，分形图形将对绘画、雕塑、建筑设计、印染工业、装潢和广告设计等产生深远的影响。文学分形则是指创作中素材取舍和提炼都与自相似有关。我国优秀的古典小说《红楼梦》通过贾府的兴衰，揭露了清朝社会的各种矛盾。可以认为，贾府就是当年整个封建社会的缩影，是一个社会分形元。就语言艺术成就来说，《红楼梦》代表了我国古典小说语言艺术的高峰。作者曹雪芹只需用三言两语，就可以勾画出一个活生生的具有鲜明个性特征的人物；典型形象的语言，都具有自己独特的个性，读者仅仅凭借这些语言就可以判别人物。这里我们看到，相似性

原理在文学中得到充分体现的光辉典范。所以，《红楼梦》具有永久的艺术魅力，使它以不朽名著的地位卓立于世界文学之林。

音乐与分形是否有关系呢？回答是肯定的。美妙的音乐受到分形原理的支配。在对此作具体分析之前先介绍一下噪声的概念。物理学家把由不同频率成份随机混合而形成的声音称为噪声。分析结果表明，这些噪声随时间变化的轨迹都是分形曲线。频谱密度$S(f)$与频率$f$之间的关系为

$$S(f)\propto f^{-\beta} \qquad (2\text{-}12)$$

式中$\beta$是一个标度指数。$\beta$与分维$D_f$有简单的关系

$$D_f = d + (3-\beta)/2 \qquad (2\text{-}13)$$

这里$d$是嵌入空间的维数。让我们来讨论$\beta$的取值。

$\beta=0$时，频谱密度$S(f)$与频率$f$的关系曲线为一条平行于$f$轴的直线，如图2-7($a$)，此时为白噪声。图2-7($b$)所示，是在很宽阔的频率范围内不同频率成份的完全随机组合。图2-8($a$)是白噪声乐谱，表现出高度随机性和不规则性，点与点之间完全不相关，对听者有一种迷惑作用。

$\beta=2$时，是描绘布朗运动的情形，称为布朗噪声，或$1/f^2$噪声，如图2-7($e$)和图2-7($f$)，乐谱如图2-8($c$)，可以看出有大的相关性和规则性。

$\beta=1$时，称为$1/f$噪声，其不规则性介于上述两种情形之间，在自然界普遍存在，如图2-7($c$)，图2-7($d$)。大多数令人愉快的音乐都是$1/f$噪声，图2-8($b$)为相对应的乐谱。

大约历经半个多世纪的探讨研究，对美妙的音乐竟然是$1/f$噪声的机理，至今仍然是个谜。有趣的是几乎所有的

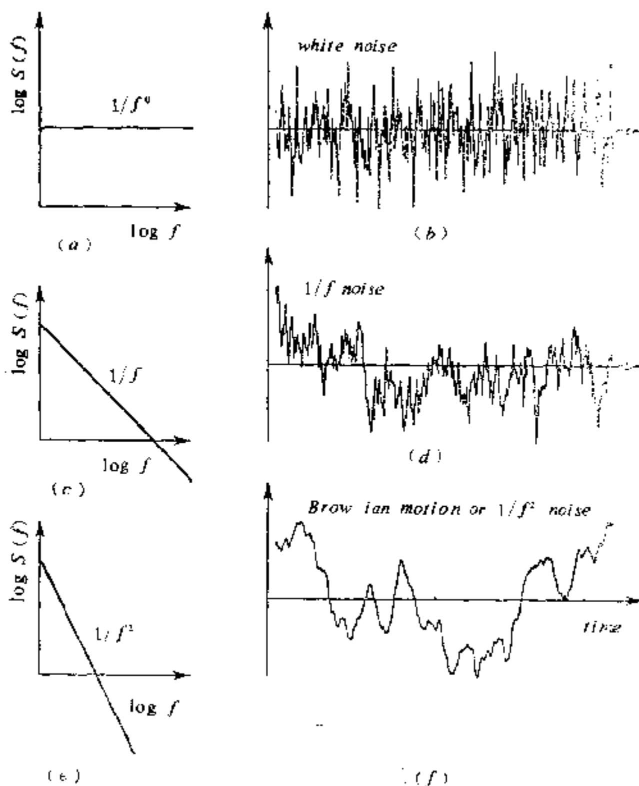



图2-7 典型的噪声频谱

音乐旋律都在模仿1/$f$噪声。$\beta$的取值在$0.5<\beta<1.5$范围内，都称为1/$f$噪声。在不同的1/$f$噪声中，音乐把随机性与确定性融为一体。我们又看到决定性与随机性的和谐协调。图2-9给出不同类型音乐实际测量的旋律频谱密度$S(f)$对频

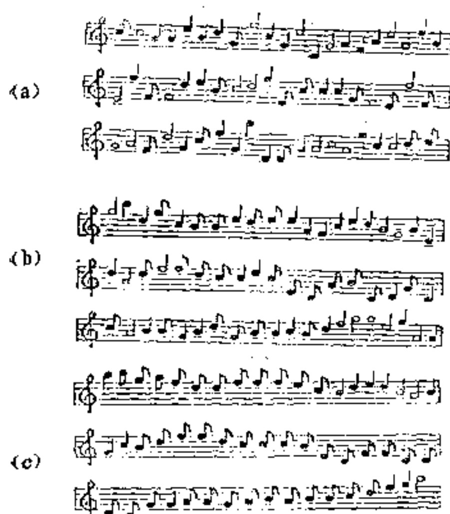



图2-8 三种噪声的乐谱

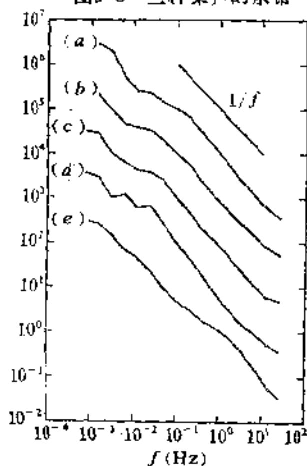



图2-9 西方音乐频谱密度与频率的关系

(a)中世纪音乐；(b)贝多芬第三交响乐；(c)德彪西钢琴曲；(d)斯特劳施的"英雄的生涯"；(e)佩珀中士爵士乐

率$f$的双对数曲线。从中我们可以看到，尽管旋律不同，风格各异，但各曲线的斜率与$1/f$噪声曲线吻合得很好。实际上，分析世界上各种语言，其发音也与$1/f$噪声密切相关。可以预料，随着分形音乐研究的深入，更为美妙动听的音乐将不断涌现，为人类提供更具美感更能激发共鸣的音乐作品。

**6．文学与自然**

自然界多姿多彩的景观，奇妙的变幻，在文学作品中与创作主体无限丰富的内在精神相结合，呈现出无穷无尽的美学境界。

自然具有情感价值，最深刻而又最微妙地体现着诗人的心境、人格和气质。面对长江，苏东坡说，“大江东去，浪淘尽，千古风流人物”，“乱石穿空，惊涛拍岸，卷起千堆雪”，其阳刚之气磅礴胸襟可见；而柳永却幽幽地说，“对潇潇暮雨洒江天，一番洗清秋，渐霜风凄紧，关河冷落，残阳当楼。是处红衰翠减，苒苒物华休，惟有长江水，无语东流”，其文弱纤柔、多愁善感的悲凉令人难忘。同样，面对大山，李白粗线条泼墨大写意：“众鸟高飞尽，孤云去独闲。相看两不厌，只有敬亭山。”我是山，山即我，物我化一，其潇洒豪迈达到了忘我之境；王维却工笔细描：“空山新雨后，天气晚来秋。明月松间照，清泉石上流。竹喧归浣女，莲动下渔舟。”其清静安谧之境令人向往，滤净尘世喧嚣骚动，正是王维人格的写照。

自然，作为道德、哲学的思辨对象，又具有理性价值。孔子的山水仁智说认为，“仁者爱山，智者爱水”；老子关于水的思考充满人伦道德的智慧：“江海所以能为百谷之王者，

以其善下之，故能为百谷王。”“不拒百流，故浩瀚无垠。”“天下莫柔弱于水，而攻坚强者莫之能胜”，滴水穿石，水滋养万物，博施而不望报，水顺其自然，能方能圆善变通，渊深清明，虚静无为却能朗照万物，各如其形；《庄子》中自然的描写更不用说充满奇思妙想。宋代诗人苏轼名诗《题西林壁》：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同。不识庐山真面目，只缘身在此山中。”山，成了他哲学思考的对象，任何事从不同的角度看，有不同的面貌，不同的意义，人生世事又何尝不如此呢？朱熹“半亩方塘一鉴开，天光云影共徘徊。问渠哪得清如许，为有源头活水来”一诗更是以自然的描写来表达读书思考有所启悟的心智活动状态。

自然，是自由的元素，而人类的内在精神的无限丰富性都能在自然中找到最佳的模式，这就要看你如何去组合这些元素，仿佛画家的调色板，你不懈地发掘自我，就会无限地发现自然，一片风景就是一片心境，这是一个永远无止境的美学境界。

文学与自然的和谐共鸣，实际上是人与自然的和谐共鸣，这里表现了自然、人与文学的统一性，即信息相似性。

# 第三章　分维计算与诠释

维数是几何学和空间理论的基本概念。1维的直线，2维的平面，3维的普通空间，这些都是人们的常识。但是如果有人问：雪花、云彩、山脉、江河、树枝、花朵，还有漩涡、烟圈，等等自然构型的维数是多少?传统数学难于作出回答，至多只能定性描述。分形论则将给出定量的分析，用分维加以表征。

这一章将讨论分维的具体计算和相应的诠释，以及分形原理概要。

通过本章的学习，希望在自己的研究课题中引用分形论作为分析问题的有力而新颖的方法的读者，可以从中找到他们容易接受的有关分形和分维的处理办法。

## §3.1　欧几里得几何

欧几里得几何是研究现实世界的空间形式及其和数量之间关系的一门学科。这是一门从生产实践中抽象出来的学科。古代埃及为了兴建尼罗河水利工程，需要进行地形测量，逐步积累和发展了许多几何知识。约在公元前300年，古希腊数学家欧几里得把前人长期生产实践中积累的几何知识，加以整理总结，形成演绎体系，写成《几何原理》名著，系统化了人们公认的一些事实，提出一系列定义和公理。其

中最著名的是平行公理：平面上一直线和两直线相交，当同侧两内角之和小于等于直角时，则两直线在这一侧充分延长一定相交。也就是说，在平面上，过直线外一点只能作一条与该直线不相交的直线。根据欧几里得提出的定义和公理来研究图形处于平面上或处于立体空间，而分为平面几何和立体几何。用欧几里得几何研究的空间称为欧几里得空间。

值得提出的是我国在几何学研究方面历史悠久，有着伟大的成就。远在上古时代，我国人民就用规矩来制作方圆，在生产和生活中发挥巧妙的作用。秦、汉500年间，撰就的《周髀算经》和《九章算术》中已有图形面积计算的记载。刘徽、祖冲之和王孝道等我国古代科学家对几何学都有重大贡献，为世人所公认。

17世纪，欧洲工业迅速发展，欧氏几何不能满足实际需要，于是法国数学家笛卡尔首先利用代数方法研究几何问题，建立了解析几何。18世纪和19世纪，由于工程、力学和大地测量的迫切需要，发展了画法几何、射影几何和微分几何。19世纪20年代又发展了非欧几何。到20世纪60年代，曼德布罗特从一大类自然构型中抽象出来分形几何学，又一次深化了人们对大自然的认识。在几何学发展的漫长历程中，可以说是美景纷呈，风光无限。

在欧几里得空间要确定一个点的位置，需要引入确定的坐标系。如果用直角坐标系，则一个几何点的位置在普通欧氏空间要用3个独立的坐标来表示，即用三个实数（$x$，$y$，$z$）代表空间的一个点。而独立的坐标数目与空间的维数相一致。也就是说，普通空间为3维空间。若要确定平面上一个几何点的位置，则要两个独立的坐标来表示，即用两个实

数（$x$，$y$）代表平面上的一个点。所以平面的维数是2。相类似，直线是1维的。显然，若空间中一个点的位置需要$n$个独立坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$才能确定，则表明这是一个$n$维空间。在相对论中讨论的时空是4维空间，用坐标$(x, y, z, t)$来表示，其中$t$是时间轴坐标。

这就是欧几里得空间的维数概念。在欧几里得空间，为了确定任意一点的位置，所需独立坐标的数目，即为该空间的维数。那么，现在把这个概念加以推广，要确定物体或几何图形中任意一点的位置，所需要的独立坐标数目，就是该物体或几何图形的维数。称此维数为欧几里得维，或经典维，记为$d$。

## §3.2 拓扑维和豪斯道夫维

上一节已经讨论了欧几里得空间的维数概念，在那里无论空间维数高低，其维数皆为整数。例如一条几何直线或弧线是1维的，一个平面或球面是2维的，一个立方体或球体是3维的。显然，这样一些研究对象都是规整又完全光滑的客体。事实上，自然界大量存在的客体是不规则的、不光滑的甚至是构型奇异的客体。这一大类客体被传统数学排斥于研究对象之外，认为是“病态”客体，不值得研究，不予理睬。分形论将以分维来表征广泛存在于自然界的一大类无序、复杂、奇异的客体。为此，先来介绍豪斯道夫维。这是数学家豪斯道夫于1919年引入的。他提出连续空间的概念，也就是空间维数不是跃变的，而是可以连续变化的，既可以是整数，也可以是分数，通过具体计算来确定维数，称为豪

斯道夫维数，记为$D_f$。为了明确表达分形维数的分数性质，曼德布罗特把豪斯道夫维数称为分维，仍用$D_f$表示。

我们来考虑一个简单的几何图形，取一个边长为单位长度的正方形，若每边放大 2 倍，则正方形的面积放大 4 倍。其数学表达式为$2^2=4$，这是 2 维图形。

对 3 维图形，如考虑一个棱边长为单位长度的立方体，若令每个棱边长度放大2倍，则立方体体积放大8倍。其表达式为$2^3=8$。诚然，对于一个$D_f$维的几何对象，若每个棱边长度都放大$L$倍，则这个几何对象相应地放大$K$倍。归纳上述结果，$D_f$，$L$和$K$三者的关系应为

$$L^{D_f}=K \tag{3-1}$$

读者不难验证，对任何普通几何对象，这个简单关系式都是成立的。现在取对数，则有

$$D_f=\ln K/\ln L \tag{3-2}$$

这里$D_f$不必是整数，对具有奇异构型的分形结构，体系的维数一般是分数，只有个别情形可以是整数。这就是1919年豪斯道夫引进的分数维概念，所以称为豪斯道夫维。

也可以从另一角度来定义分维。上面是从放大几何对象作出定义，现在从缩小几何对象来定义分维。假定有一单位正方形，把它等分为 9 个小正方形，每个小正方形相对原来的单位正方形，每边缩小为原来的1/3倍，然而 9 个小正方形的总面积仍为原来的单位正方形面积，即$9\times(1/3)^2=1$。取对数就成为$2=\ln9/\ln3$。这里 2 正是该几何图形的维数。现在我们把一个$D_f$维的几何对象等分成$N$个小的几何图形，则每个小图形每维缩小为原来的$r$倍，而$N$个小图形的总和

应为$N\cdot r^{D_f}=1$。所以分维为

$$D_f=\frac{\ln N}{\ln(1/r)} \tag{3-3}$$

容易看出式（3-3）与式（3-2）实际上是相同的，只是形式稍有不同。

让我们再从测量学的角度来定义分维。假定有一个面积为$S$的几何图形，今用半径为$r$的小圆去测度其面积，问需多少小圆才能使该几何图形全部被覆盖？容易计算所需小圆的数目为

$$N(r)=S/\pi r^2\propto 1/r^2 \tag{3-4}$$

这里小圆数目与小圆半径平方成反比。同样，若测度体积为$V$的几何对象，可用半径为$r$的小球去填充该几何对象，则所需小球的数目应为

$$N(r)=\frac{V}{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}\propto 1/r^3 \tag{3-5}$$

推广到一般的情形，对一个体积为$A$，分维为$D_f$的几何对象，要用半径为$r$的小球去测度，则所需小球数目为

$$N(r)=A/Cr^{D_f}\propto 1/r^{D_f}$$

这里$C$为结构因子。所以分维为

$$D_f=\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} \tag{3-6}$$

这里得到的分维也称为柯尔莫哥诺夫容量维。定义容量维为

$$D_{cp}=\lim_{r\to 0}\ln N(r)/\ln(1/r) \tag{3-7}$$

式（3-6）与式（3-3）相一致。下面证明式（3-3）与式(3-2）实际上是相同的。也就是容量维与豪斯道夫维相一致。

假定该几何对象各棱边放大$L$倍，相应地该几何对象体积放大了$K$倍，则所需的小球数目应为

$$N' = KA/r^{D_f} \tag{3-8}$$

如果把用来测度的小球半径$r$缩小$L$倍，而$A$保持不变，则所需小球数目仍应为$N'$。这时计算小球数目的表达式变为

$$N' = \frac{A}{(r/L)^{D_f}} \tag{3-9}$$

比较式（3-8）和式（3-9）有

$$D_f = \ln K/\ln L \tag{3-10}$$

这个式子与式（3-2）完全一致。所以，式（3-6）也可以作为分维的定义。

现在我们来讨论拓扑维。拓扑学是数学的一个分支学科，有时也称之为橡皮几何学。研究几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质，称这种性质为拓扑性质。例如，画在橡皮膜上的图形，当橡皮膜受到形变（拉伸、压缩，扭曲），但不破裂或折迭时，则图形某些性质保持不变，如曲线的封闭性，两曲线的相交性等性质不发生变化，即拓扑变换下的不变性。设想有两个带两个把手各具特点的水壶，均用任意可塑的橡皮泥制作而成，那么，根据拓扑变换，无需打碎水壶重新制作，就可以将一个水壶连续地形变为另一个水壶。从拓扑学的观点看，它们具有相同的拓扑维数。同样，任何海岛的海岸线，在拓扑上都等价于一个圆，即它们的拓扑维$D_t$都等于1。也就是说，尽管每个海岛千差万别各

具特色，但在拓扑学上都等价于一个圆，有相同的拓扑维。只要稍加推广，则地球上所有海岸线在拓扑上也是相同的。可以论证欧几里得空间的维数$d$与拓扑维$D_t$相等，即对$n$维欧几里得空间$R^n$，恒有

$$D_t = d \tag{3-11}$$

## §3.3 集 合 论

### 3.3.1 集合概念

集合的概念与数的概念大体上是一样古老的。可以想象，原始人为了生存，三三俩俩，三五成群，在原野，在林海，奋力打猎的情景。有一天，两个原始人猎获一只羊。自然，他们会意识到是他们两个人协同行动的结果。这里一只山羊，两个人，都是数的概念；同时，两个人又是有别于两个单独个体的集合体，也就是集合的概念。当一个小孩听到"二"这个字时，他会想到一个自己所体验过的两个事物，如一个苹果和一个桔子组成的集合。所以，把某些事物汇合成为一个整体的思想，可以说是很自然的。然而，集合论作为数学的组成部分一直到19世纪后期，才由康托尔提出。

数学研究的对象，是那些从客观存在的事物中高度抽象出来的客体。某一客体由若干部分组成，组成部分也是一种客体。我们称这些属于某客体的可以互相区别的客体的汇集为集合。一般地说，把具有共同属性的事物汇集成一个整体，就形成一个集合。

### 3.3.2 集合的表示

集合论研究的对象是非常广泛、非常一般的客体。客体的组合，又常是一个客体。若某客体$a$，属于集合$A$，称$a$为集合$A$的元素，记为$a \in A$，表示$A$包含$a$，或$a$在$A$之中；若客体$a$不属于$A$，记为$a \notin A$，表示$A$不包含$a$，或$a$不在$A$之中。

一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，称为有限集，否则称为无限集。

### 3.3.3 集合的说明方法

集合的说明方法有列举法和叙述法两种。

列举法：这种方法直接了当地把集合的所有元素一一列举出来。例如

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{1, 2, 3, \cdots\}$

$C = \{$圆珠笔，电视机，录音机，大熊猫$\}$等等。

叙述法：利用规则说明某客体是否属于该集合。例如

$S_1 = \{x \mid x$是正偶数$\}$

$S_2 = \{x \mid x$是北京十大建筑$\}$

$S_3 = \{x \mid x = 2$或$x = 3\}$

等等。

### 3.3.4 集合的运算

两个集合$A$和$B$相等，当且仅当它们有相同的元素，即$A$中的元素与$B$中的元素完全一致。换句话说，$a \in A \Leftrightarrow a \in B$时，两个集合$A$和$B$相等，记为$A = B$；两个集合不相等记为

$A \neq B$。符号⇔是等价的意思。

集合的元素允许是一个集合。例如

$$S=\{a,\{1,2,\},c,\{d\},p\}$$

这里要注意，$1\in\{1,2\}$，但$1\notin S$，$d\in\{d\}$，但$d\notin S$。

关于子集的定义：设$A$和$B$是任意两个集合，假如$A$的每一个元素是$B$的元素，则称$A$为$B$的子集，或$A$包含在$B$内，或$B$包含$A$。记为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$。集合$A$是集合$B$的子集也可以表示为$a\in A\Rightarrow a\in B$。这里，符号⇒表示蕴涵。

现在给出空集的定义：不包含任何元素的集合为空集，记为$\phi$。可以证明，对于任意一个集合$A$，有$\phi\subseteq A$。

关于交集的定义：所谓集合$A$和集合$B$的交集，是指集合$C$是由$A$和$B$共有元素所构成的集合，即

$$x\in C\Leftrightarrow x\in A\,\&\,x\in B$$

用记号$C=A\cap B$表示，这里$A\,\&\,B$表示$A$和$B$都是，也写作$A\wedge B$。交集的定义如图3-1。

关于并集的定义：所谓集合$C$是集合$A$和集合$B$的并集是指由$A$和$B$中的元素全体所构成的集合，即

$$x\in C\Leftrightarrow x\in A \quad or \quad x\in B$$

用记号$C=A\cup B$表示。这里$A\quad or\quad B$表示是$A$或是$B$，也可写作$A\vee B$。并集的定义如图（3-2）。

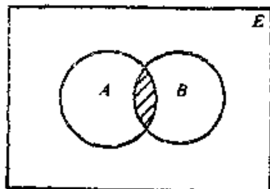


图3-1 交集

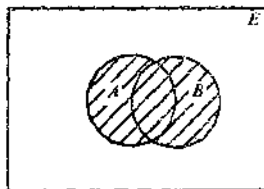


图3-2 并集

关于差集的定义：设$A$和$B$为两集合，又集合$C$的所有元素都属于$A$，但不属于$B$，即

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \notin B$$

则称$C$为$A$和$B$的差集，记为$C = A - B$。差集的定义如图 3-3。

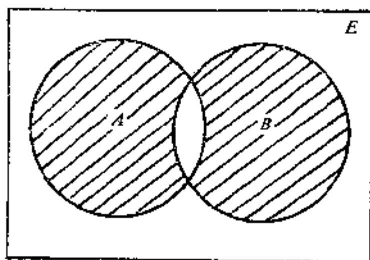



图3-3 差集

### 3.3.5 集合的性质

交换律：$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

结合律：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

吸收律：$(A \cup B) \cap A = A$

$(A \cap B) \cup A = A$

### 3.3.6 集合论的发展

集合论建立于1908年到1922年期间，在其发展过程中曾遇到一些似是而非的悖论(paradox)的非议，其中最著名的是逻辑主义者、数学家罗素(B Russell)提出的悖论。罗素曾

把悖论写成多种形式，“理发师的悖论”是其中之一。

一个理发师在城里宣称，他要为所有自己不刮胡子的人刮胡子，而且不为那些自己刮胡子的人刮胡子。

人们要问，理发师自己该不该为自己刮胡子呢?如果他为自己刮了，按他自己的宣称，他就不该为自己刮，但是，如果他不为自己刮胡子，按他的宣称，又应该由理发师自己为自己刮胡子。很显然，理发师宣称的事情应该把自己排除在外的。为了避免这种悖论，罗素规定凡是含有一个集合内全部元素的，它本身不应该再是这个集合的一个元素。事实上，集合论中悖论的出现促使这一数学领域的发展。在这个数学领域里，所有数学公理都被严格地加以考查。

现在，可以认为，几乎所有的数学分支都是研究某类事物的集合。因此，也可以认为，集合是现代数学分支的基础。几何学是研究点的集合，代数是研究数的集合，及这些集合的运算。数学分析主要涉及各种函数，而函数是一种特殊类型的集合。

## §3.4 分形的数学定义

### 3.4.1 定义

分形是这样一个集合，其豪斯道夫维$D_f$严格大于拓扑维$D_t$，即

$$D_f > D_t \qquad (3-12)$$

这是曼德布罗特最初的定义。考虑到对普通的规则几何对象$D_f = D_t$，所以，后来把分形定义成使不等式

$$D_f \geqslant D_t \qquad (3\text{-}13)$$

成立的几何对象。例如下一节将要讨论的康托尔集合，$D_f = \ln 2/\ln 3 = 0.6309$，而$D_t = 0$，康托尔集合的维数$D_f > D_t$，所以是一种分形。又如柯曲折线，$D_f = \ln 4/\ln 3 = 1.2618$，而$D_t = 1$，柯曲折线的维数$D_f > D_t$，所以也是一种分形。

自相似集是研究得最多最透彻的一类分形集。这类分形集的特征是局部与整体相似。换句话说，若适当放大尺度，则任何一个局部都可以与整体重合。按集合论的语言：若一有界集合，包含$N$个不相重叠的子集，当其放大或缩小$r$倍后，仍与原集合叠合，则称为自相似集合。自相似集是分形集。换句话说，具有自相似性的系统叫做分形。当放大或缩小的倍数$r$不是一个常数，而必须是$r(r_1, r_2, \cdots)$的各种不同倍数去放大或缩小各子集，才能与原集合重合时，称为自仿射集合。具有自仿射性的系统叫做分形。

### 3.4.2 广义体积

欧几里得几何学中的点、线、面和体，用豪斯道夫的定义算出的维数仍为0，1，2和3。从这类几何对象可以看出如下特点：用低于测量对象维数的尺度去测量它，得到的结果是无穷大；用高于其维数的尺度来测量它，得到零；只有用与其本身维数相同的尺度来测量，才能得到有限的数。

例如一个2维图形的面积，用2维的标准方块，如边长为$l$，面积为$l^2$的小方块去覆盖它，所得方块数目就是以$l^2$为单位的测量对象的面积$A$，为有限数值。如用1维尺度去测量它，其测量值取决于1维尺子的宽度$\delta$，即长度$L = A/\delta$。按几何学定义1维的线是没有宽度的。

$$长度=\lim_{\delta\to 0} A/\delta=\lim_{\delta\to 0} A\delta^{1-2}=\infty \qquad (3\text{-}14)$$

若用3维的尺子去测量，其测量值取决于测量对象的厚度，设为$\delta$，则体积$V=A\delta$。按几何学定义，2维图形是没有厚度的。

$$体积=\lim_{\delta\to 0} A\delta=\lim_{\delta\to 0} A\delta^{3-2}=0 \qquad (3\text{-}15)$$

现在加以推广，设有一$D_f$维的几何对象，用$d_i$维的尺度去测量它，得到的$d_i$维体积为

$$V_i=\lim_{\delta\to 0} V\delta^{d_i-D_f} \qquad (3\text{-}16)$$

$V_i$称为广义体积。对具有无穷多自相似内部结构层次的几何图形，这个规律也成立。此时$D_f$即豪斯道夫维数。

我们看到，用$n$维的标准体$l^n$去测量某个几何对象时，只有$n$与拓扑维一致时，才能得到有限的结果。如果$n<d$，结果是$\infty$；如果$n>d$，则得到0。这个简单的观察对以后有关分维的理解和掌握将是重要的。

## §3.5 分维计算的具体形式

分形的特点是由分维来描述的。因为所描述的具体对象不同，分维计算的具体形式也有多种，从理论上讲可以有无穷多种分维，这是因为客观存在的系统千千万万个，以至于无穷之故。

### 3.5.1 相似维数

分形客体具有自相似性，所以引入相似维数是很自然

的，通过对体系相似维数的计算来描述它是很贴切的。我们从考察具有整数维数的普通图形开始，容易引入相似维数(Similarity Dimension)。

假定有一边长为$2l$的正方形，是简单的2维($d=2$)图形（图3-4）。现将它4等分($N=4$)，成为4个边长皆为$l$的小正方形。对原正方形（整体）来说，小正方形是其局部，各小正方形（局部）彼此相同。它们经过平移或旋转后，彼此可以重复。因为是4等分，所以各小正方形边长是原正方形边长的1/2（比例常数$\beta=l/2l=1/2$），即局部的边长是整体边长的$\beta=1/2$倍。局部与整体相似，所以称局部与整体的相似比为$\beta$。用式子表达为

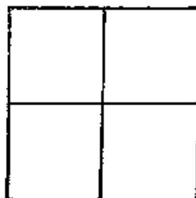


图3-4 正方形4等分

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1,\text{即}\ln 4/\ln 2=2$$

这里$N=4,\beta=1/2,d=2$。写成一般表达式

$$d=\frac{\ln N}{\ln(1/\beta)}=2$$

这是2维图形，$d=2$的情形。

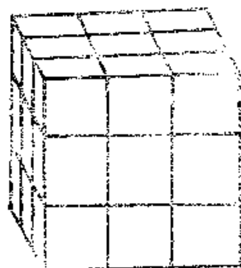
对一长为$nl$的线段，将它$n$等分($N=n$)，原直线（整体）成为$n$个相同的小线段（局部），显然，每个局部都以相似比$\beta=l/nl=1/n$与整体相似，所以有

$$n\times(1/n)^1=1,\text{即}\quad \ln n/\ln n=1$$

这里$N=n,\beta=1/n$，$d=1$。其一般表达式为

$$d = \frac{\ln N}{\ln(1/\beta)} = 1$$

为 1 维的情形。


图3-5　立方体27等分

再看 3 维图形，考察一个棱边长为$3l$的立方体。将其27等分，每个棱边则为3等分，形成27个（$N = 27$）棱边长为$l$的小立方体，如图3-5所示。显然，各小立方体以相似比$\beta = 1/3$与原立方体相似。即原图形整体等分为27个局部，每个局部都以相似比$\beta = 1/3$与整体相似。所以有

$$27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1, \text{即} \quad \ln 27/\ln 3 = 3$$

这里$N = 27$，$\beta = 1/3$，$d = 3$。其一般式子为

$$d = \ln N/\ln(1/\beta) = 3$$

为 3 维的情形。

归纳上述关于规则图形维数的讨论，可以对相似维数定义如下：假定某客体由$N$个局部组成，每个局部以相似比$\beta$与整体相似，则此客体的相似维数$D_s$定义为

$$D_s = \ln N/\ln(1/\beta) = \ln N/-\ln\beta \qquad (3\text{-}17)$$

此处$D_s$不限于整数，可以是分数。显然相似维数$D_s$与豪斯道夫维数$D_f$是一致的。只是这里明确称$\beta$为相似比，对某些研究对象是很方便的，意义也很明确。

### 3.5.2 信息维数

根据分维定义，测量分形结构的方法，可以取边长为$\varepsilon$的小盒子复盖分形结构来进行度量。因为分形结构内部有各种层次的空洞和缝隙，有些盒子是非空的，有些盒子是空的。把非空的盒子数目数出来，记为$N(\varepsilon)$。然后缩小盒子的尺寸$\varepsilon$，所得到的$N(\varepsilon)$自然要增大。按定义，只要在双对数坐标纸上画出$\ln N(\varepsilon)$对$\ln\varepsilon$的曲线，则曲线的直线部分斜率就给出分维$D_f$。现在，把盒子编号。如果知道分形结构落入第$i$只盒子的几率为$P_i$，就可以写出用尺寸为$\varepsilon$的盒子进行测度所得到的信息量为

$$I = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i \tag{3-18}$$

现在用$I$代替$N(\varepsilon)$来定义信息维数$D_1$。为了使结果更精确，要不断缩小$\varepsilon$，而且要看$\varepsilon$不断缩小时是否有极限存在。即

$$D_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\sum_i P_i \ln(1/P_i)}{-\ln\varepsilon} \tag{3-19}$$

假如落入每个小盒子的几率都相同，即$P_i = 1/N(\varepsilon)$，求和号下面的每一项都与盒子的编号无关，则$I = \ln N(\varepsilon)$，于是回到$D_f$的定义。信息维数的计算比简单分维$D_f$复杂，要先求出几率$P_i$，在第11章将看到其具体应用。

### 3.5.3 关联维数

这是近年来发展的一种计算分维的方法，不仅实验物理

学家，而且生物学家和经济学家也已掌握了这种方法。这种方法是从实验数据计算分维。

假定实验中测得一个数据序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_i, \cdots\cdots$$

其中$x_i$是第$i$时刻测量得到的实验值，由于此数据序列是按时间序列进行测量的，所以称为时间序列。例如第$i$秒时，布朗粒子的横坐标。因为不知道实际的相空间维数是多少，我们先用这些数据支起一个$m$维的空间。例如在力学中往往把每个质点的坐标和速度当作坐标轴，支起一个相空间。相空间每个点代表力学系统的一种可能状态。但是，在多数情况下，人们无法确定相空间的维数有多高。例如流体中的每一个点都有自己的速度和坐标，无穷多个连续的点构成流体，因此，其相空间必定是无穷维的。然而，另一方面，决定复杂系统基本运动状态的变量，又可能是为数不多的一组变量，它们在很高维数的相空间中只组成相当低维的几何对象，有时是分维对象。

现在我们回到建造$m$维嵌入空间上来，造$m$维空间的办法很多。例如取$m=10$，把

$$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{10}$$

作为10维空间中的一个矢量$y_1$。然后，右移一步，把

$$x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots, x_{11}$$

作为10维空间中的第二个矢量$y_2$。这样构造出一批矢量$y_1$，$y_2, \cdots\cdots, y_k$。任意两矢量之差的绝对值$r_{ij}=|y_i-y_j|$，为矢量$y_i$与$y_j$端点间的距离。任意给出一个数$\varepsilon$，然后与所有的点对（$y_i$，$y_j$）间的距离$r_{ij}$相比较看看有多少$r_{ij}$小于$\varepsilon$，其数目记为$N_1(\varepsilon)$，而$r_{ij}>\varepsilon$的数目为$N_2(\varepsilon)$，$N(\varepsilon)=N_1(\varepsilon)+$

$N_2(\varepsilon)$。把距离小于$\varepsilon$的点对在所有点对中所占的比例记为$C(\varepsilon)$。

$$C(\varepsilon)=N_1(\varepsilon)/N(\varepsilon) \tag{3-20}$$

计算过程可以由计算机来完成。

由上述做法容易看出，计算结果与$\varepsilon$的取值有关。如果$\varepsilon$取值太大，则所有的点对距离$r_{ij}$都不会超过它，所以$N_1(\varepsilon)=N(\varepsilon)$，$C(\varepsilon)=1$，取对数后$\ln C(\varepsilon)=0$。这样的$\varepsilon$值不能反映系统内部的性质，没有意义；如果$\varepsilon$取得太小，所有的$r_{ij}>\varepsilon$，则$N_1(\varepsilon)=0$，于是$C(\varepsilon)=0$。这样的$\varepsilon$值同样未能反映系统的性质。可见，$\varepsilon$的取值范围（即尺度变换）受到大小两端的限制。适当调整$\varepsilon$的取值大小，可能在一段$\varepsilon$区间内有

$$C(\varepsilon)=\varepsilon^{\nu} \tag{3-21}$$

与分维的定义相比较，可以看出式中指数$\nu$是一种维数。实际上$\nu$是关联维数$D_2$的很好逼近。所以关联维数定义为

$$D_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln C(\varepsilon)/\ln\varepsilon \tag{3-22}$$

式中$C(\varepsilon)$有如下形式

$$\begin{aligned}C(\varepsilon)&=\frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N}\theta(\varepsilon-|y_i-y_j|)\\&=\frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N}\theta(\varepsilon-r_{ij})\end{aligned} \tag{3-23}$$

这里 $\theta(\varepsilon-r_{ij})=\begin{cases}1, & 当(\varepsilon-r_{ij})\geqslant 0\\0, & 当(\varepsilon-r_{ij})<0\end{cases}$

从式（3-20）可见，$\varepsilon$太大时，$C(\varepsilon)=1$，所以$\nu=0$。$\varepsilon$太小时，$\nu=m$。这是因为此时实验中一切偶然噪声会完全表现出来。由于噪声在任何一维上都起作用，所以$m$维空间就

测得$v=m$。在这两种情形下，都与所研究的系统之本质没有关系，只有中间区域$C(\varepsilon)=\varepsilon'$，才对应于反映系统的分形性质。

### 3.5.4 集团分维和质量分维

考虑一定数量的单体（原子或分子）形成的线状链（图3-6），在长度为$L=2R$的链中单体的数目为



图3-6 线状链

$$N=(R/R_0)^1 \tag{3-24}$$

式中$R_0$是单体半径。类似地，在平面聚集的情况（图3-7），其单体数为

$$N=\rho(R/R_0)^2 \tag{3-25}$$

式中$\rho=\pi/2\sqrt{3}$，为密堆积球的致密度。对3维密堆积的情况（图3-8），其单体数为

$$N=\rho(R/R_0)^3 \tag{3-26}$$

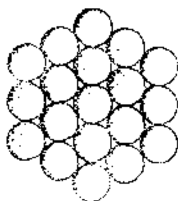


图3-7 面聚集

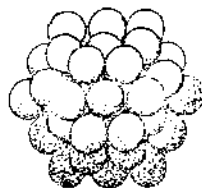


图3-8 3维密堆积

式中$\rho=\pi/3\sqrt{2}$，为密堆积球的致密度。考虑到球面或圆平面的周界至少应有一个单体覆盖，所以，上述各式应满足$R/R_0\geqslant1$。根据上述讨论，可以写出普遍的形式

$$N=\rho(R/R_0)^{D_0} \tag{3-27}$$

在这个单体数目与半径的关系中，$D_c$是集团维数。如果每个单体的质量相同，则可以视$N$为质量，$\rho$为质量密度，而集团维数也改称为质量维数$D_m$。

致密度$\rho$与堆积方式有关。例如，许多球无规地堆积在一定体积中，则致密度由$\rho=\pi/3\sqrt{2}=0.74$降至0.64。如堆积成其他形状，则$\rho$为与形状因素有关的量。如迴转椭球，其短长轴之比为$b/a$，则球的密堆积致密度为$\rho=(\pi b/a)/3\sqrt{2}$。集团维数$D_c$和致密度不同，它与集团的形状、堆积疏密程度、无规堆积或孔隙均匀分布堆积方式等因素无关。

最后，举一个关于集团分形的例子。柯曲折线的构成过程可以看成反复将线段切断成更小的线段。而这里，将它看成是许多单体（即生成元）聚集而成的集团。设每一生成元的线度为1单位，则$R_0=1/\sqrt{3}$。生成元是最小的集团（图3-9）。第一代集团包含$N=4$个单体，其半径$R=3R_0$。第二代集团包含$N=4^2=16$个单体，其半径$R=3^2R_0$。第$n$代集团则包含有$N=4^n$个单体，其半径增至$R=3^nR_0$。由此可见，三组元（即将一单位长度的初始元三等分，然后规定操作规则形成生成元。）柯曲折线满足式（3-27）中$N$和$R$的关系。

例如对第一代，$N=4$，$R=3R_0$代入式（3-27）则有

$$4=(3R_0/R_0)^{D_c},D_c=\ln4/\ln3=1.2618\cdots\cdots$$

单体数与半径关系中的$D_c$为集团分维。

### 3.5.5 分维的一般定义

随着分形论研究的深入发展，发现具体计算自然界多种

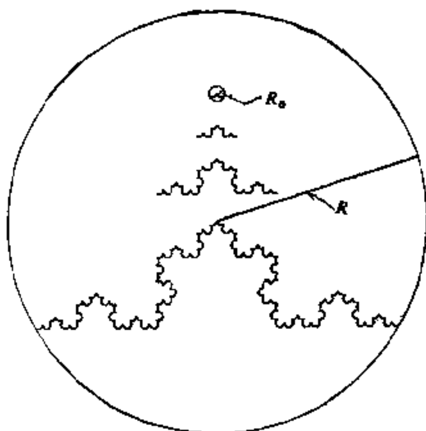



图3-9　3组元柯曲集团

多样分形特征的分维形式也有多种。因此可以统一给出分维$D_q$的一般定义，$D_q$依赖于参数$q$。

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{q_i \to q} \frac{1}{q_i - 1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{n} P_i^{q_i}}{\ln \varepsilon} \qquad (3\text{-}28)$$

$$q = -\infty \cdots\cdots -1, 0, 1, \cdots\cdots, +\infty$$

式中$P_i$是覆盖几率，当用边长为$\varepsilon$的小盒子去覆盖分形结构时，$P_i$是分形结构中某点落入小盒子的几率。当$q$取不同值时，$D_q$表示不同分维。如$q=0,1,2$时，$D_q$分别等于豪斯道夫分维$D_0$（即$D_f$）、信息维数$D_1$和关联维数$D_2$等。

## §3.6　分形原理概要

作为这章的结束，我们以条列式，介绍有关分形的若干

原理。

### 3.6.1 自相似原理

自相似原理已经在第二章讨论过，并在本章关于分形的数学定义中又提及，所以，读者已比较熟悉了。作为分形论的重要原理，反复出现，逐步加深理解，并非多余。这里以较强的术语形式表述自相似性原理。

假定集合$S$由$n$个不相重叠的子集$S_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$组成，若$S_i$放大（或缩小）$r_i$倍后与$S$重合，则$S$是一个自相似分形集。当$r_i=r(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$时，称为均匀自相似分形集。分维为

$$D_f=\frac{\ln N}{\ln(1/r)} \tag{3-29}$$

当放大（或缩小）倍数不全相等时，即每个子集都各自有一个相似比$r_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$时，称集合$S$为自仿射集合，是一种非均匀自相似分形集。其分维由下式定义

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{D_f}=1 \tag{3-30}$$

### 3.6.2 积和原理

积和原理也称曼德布罗特经验定理。假定分形集合$S$是两个互不重叠的分形子集$S_1$和$S_2$的乘积，则$S$的维数等于$S_1$和$S_2$的维数之和。

$$D_f=D_1+D_2 \tag{3-31}$$

例如，$S_1$是柯曲折线，$S_2$是直线，则$D_f=D_1+D_2=$

1.2618＋1＝2.2618。实际上这是由柯曲折线平移得到的柯曲曲面的维数。这一原理使我们可以由边界线的维数计算曲面的维数。

### 3.6.3 加和原理

若两个分形集合$S_1$和$S_2$的交集为$S$，则$S$的维数为

$$D_f = D_1 + D_2 - d \tag{3-32}$$

式中$d$是嵌入空间的欧儿里得维数。

例如，两个平面$A$和$B$在$d=3$的欧儿里得空间相关点的集合，即交集的维数$D_f$为

$$D_f = D_1 + D_2 - d = 2 + 2 - 3 = 1$$

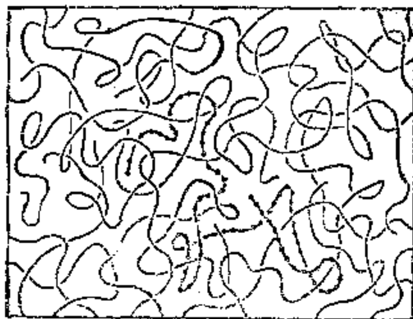


图3-10 高分子链

两平面相交于一共同的直线。这个关系可以推广到分形体系。现在问高分子$A$和高分子$B$在3维空间交点集合的维数。图3-10是一高分子链。理想的高分子可以用一简单无规行走的轨迹来模拟，高分子链线度大小$R$与单体数目$N$的关系为

$$R \propto N^{1/2} \tag{3-33}$$

则 $$N(R) \propto R^2 \tag{3-34}$$
此式表明，理想高分子的分维$D_f=2$。推广式（3-32）可以得到

$$D_f=D_1+D_2-d=2+2-3=1$$

两高分子链$A$和$B$在3维空间的诸交点的维数为1。

再看一个例子，设3维空间有两条直线，问它们交点的维数是多少？按式（3-32），其维数$D_f=-1$。这是几何的直观结论。如何理解这一结论？负分维的意义何在？让我们从几率的角度来分析。假定某体积的线度为$L$，则体积$V \simeq L^3$。每条线占据的点数为$L$。所以某条线上某点与另一条线上的某点相遇的几率为$L/V \simeq L^{-2}$。两条线相交于任一点的几率，应乘上第一条线的总点数$L$，所以有

$$P(L) \simeq L^{-1} \tag{3-35}$$

这里$-1$相应于分维$D_f=-1$。由此可以解释负分维的意义。两条线在任意一点相交的几率与线度$L$成反比，$L$越大，相当于两条线所处的体积越大，其相交的几率越小；若$L$越小，相当于两条线所处的体积越小，其相交的几率相对变大。

### 3.6.4 和并原理

设分形集$S$是两个互不相关的分形子集$S_a$和$S_b$的和，两分形子集的分维分别是$D_a$和$D_b$，且$D_a>D_b$，则$S$的分维为$D_a$。

### 3.6.5 匹配原理

若要分形集$S_1$和$S_2$有效地组成分形集$S$，则要求$S_1$和

$S_2$的分维相等或局部的分维相等。在实际问题中往往只要求$S_1$和$S_2$的分维近似相等。

### 3.6.6 级差原理

分形整体是分形集$S$，$S$由分属于不同层次的分形子集$S_i$($i=1,2,3,\cdots\cdots$)构成，$i$称为级次。$S_i$以某种方式与$S$相似。$i$越小，结构越简单；$i$越大，结构越复杂（见图2-5)。$S_1$为1级子集,即生成元,最简单。$i\to\infty$为分形整体。级次$i$越接近的子集越相似；反之，级次$i$相差越大，相似程度越小。这与生物进化的历程是很类似的。

### 3.6.7 自仿射原理

设在$d$维欧几里得空间，分形集$S$由$n$个互不重叠的分形子集$S_i$($i=1,2,3,\cdots\cdots,n$)组成。若$S_i$通过仿射变换$r_k$($k=1,2,3,\cdots\cdots,d$)后与$S$重合，则称$S$为自仿射分形集。仿射变换的涵义是某点$X=(X_1,X_2,\cdots\cdots X_d)$变换为另一点$X'=(r_1X_1,r_2X_2,\cdots\cdots,r_dX_d)$，这里$r_1,r_2,\cdots\cdots r_d$不全相等，$r_k=(r_1,r_2,\cdots\cdots,r_d)$为比率矢量。自仿射分形的分维不是唯一的，根据需要，可以引入不同的分维来表征系统的分形特性。

# 第四章　规则分形

传统数学只涉及那些光滑和规则的1维线（直线与曲线）、2维面（平面和曲面）和3维立体（多面体和球体等）；而那些广泛存在于自然界的不光滑和不规则的空间构型，则被视为“病态”客体，被排除于传统数学研究对象之外，不予理会。

近年来，随着分形论的确立，情况发生很大变化，人们普遍注意到，不规则和不光滑的集合可以而且必须进行详细的数学描述。事实上，不光滑和不规则的集合比经典的几何图形更能反映许多自然现象的本来面目。自然界的许多事物与现象所具有的不光滑性和不规则性往往是随机性的。我们将在第五章讨论随机分形，本章先讨论规则分形，它是由数学家按一定规则构造出来的。我们将详细介绍多种规则分形图形，并详细讨论其独具的性质，分别计算各种分形系统的分维。

## §4.1　康托尔点集

取一线段［0,1］，三等分，舍去中间段，保留两侧的两段，保留的两段各自再三等分，并舍去中间段（图4-1）。照此操作，无限分割舍弃下去，所有保留的部分组成三分康托尔集合。由于在不断分割舍弃过程中，所形成的线段数目越来

越多，长度越来越小，在极限的情况下，康托尔集合是一个点集。点集中有无穷多个点，所有的点处于非均匀分布状态。此点集具有自相似性，其局部与整体是相似的，所以是一个分形系统，如图4-1所示，其中$E_0$是康托尔点集的初始

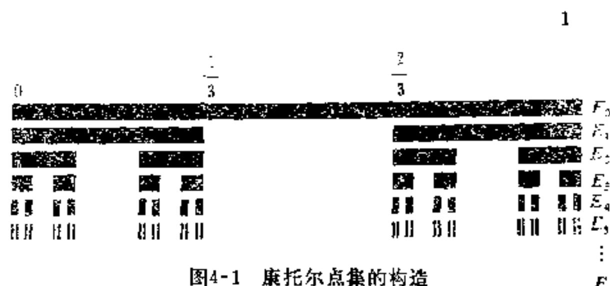


图4-1　康托尔点集的构造

元[0,1]线段，$E_1$是生成元。图4-2是康托尔点集的前三代。其中$E_1$表示由$E_0$舍去中间1/3之后得到的，即包含[0,1/3]和[2/3,1]两区域。分别舍去这两个区域的中间1/3得到$E_2$，$E_2$包含[0,1/9]，[2/9,1/3]，[2/3,7/9]，[8/9,1]四个区域。按此规则继续操作下去，则$E_k$将由$2^k$个长度各为$3^{-k}$的区域组成。所以三分康托尔点集$F$是由属于所有$E_k$的数

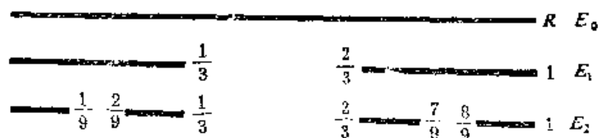


图4-2　康托尔点集的前三代

组成的。更确切地说，集合$F$是集序列$E_k$当$k$趋于无穷时的极限。显然，我们不可能画出带有无穷小细节的$F$自身，因

此，$E_k$的图形实际上是一个$k$充分大时，对集合$F$图形的逼近。

可能有个问题要提出，构造康托尔集的过程，是通过一系列不断地舍去部分子区域的过程而构造出来的，那么还能保留下什么呢？事实上，$F$是一个不可数的无穷集合。在它的每一个点的邻域中都包含集内的无穷多个数。三分康托尔集在[0,1]中可以展成以3为底的幂级数形成。

$$a_1^1 3^{-1} + a_2^2 3^{-2} + a_3^3 3^{-3} + \cdots \qquad (4\text{-}1)$$

其中，$a_i$的取值受限制，只取0或2，不取1。这是因为从$E_0$演变成$E_1$时，舍弃了$a_1 = 1$的数，从$E_1$演变成$E_2$时，舍弃了$a_2 = 1$的那些数。以此类推，集合就是由这些数组成。

现在我们来总结一下三分康托尔集的若干性质，这样一些性质对许多分形结构来说都是适合的，因为它们常常具有共性。

1° 自相似性。容易看出，区域[0,1/3]和[2/3,1]作为$F$的局部与$F$整体是相似的，其相似比为1/3。再看$E_2$的四个区域同样作为$F$的局部也分别以相似比1/9与$F$相似。以此类推，康托尔集实际上包含许许多多按不同相似比与自身相似的子集（局部）。

2° 精细结构。康托尔集合$F$包含有任意小比例的细节，所以，其图形越放大，间隙就越清楚地呈现出来。

3° 无穷操作或迭代过程。集合$F$历经反复不断地舍弃[0,1]区域的中间1/3而得到，持续的步骤得到$E_k$是$F$的越来越好的逼近。

4° 传统几何学陷入危机。$F$的几何性质难以用传统的几何学术语加以描述，$F$既不满足某些简单条件如点的轨迹，

也不是任何简单方程的解集。其局部也同样难描述，因为每一点附近都有大量被各种不同间隔分开的其它点存在。

5° 长度为零。$F$是不可数无穷集合，然而它的大小不适合于用通常的测度和长度来度量，用任何合理定义的长度去度量，其长度总为零。

6° 简单与复杂的统一。虽然$F$有错综复杂的精细结构，却源于一个基本的简单结构——分形元及其初始元。

图4-3以一个平面图形（正方形）作为初始元，来构造一个分形集，将正方形16等分为16个小正方形，保留其中4个，而舍去其余的。然后对保留的4个小正方形作同样操作。以此类推，以至无穷。形成点集，集合的性质与康托尔集相类似，称之为康托尔尘埃。

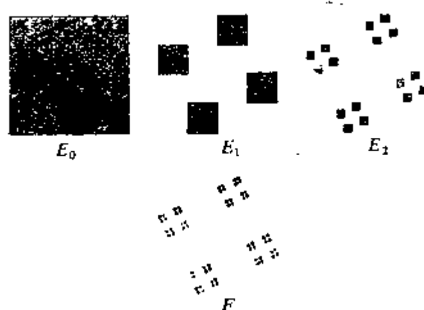



图4-3 康托尔尘埃

现在计算系统的分维。可以设想，开始时是三等分后的一小线段，将此线段放大3倍，然后把中间1/3段舍去，这样实际得到的是2段1/3线段，所以$L=3,K=2$。利用豪斯道夫分维式（3-2），把$L$和$K$代入，则

$$D_f = \ln K / \ln L = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309\cdots \quad (4\text{-}2)$$

我们也可以用相似维数$D_s$来计算系统的分维。视康托尔集合的初始元为长度等1单位的线段，生成元为长度各为1/3的左右两小线段。诚然，对系统的整体初始元来说，这两小线段中任意一小线段都是它的局部，局部以相似比$\beta = 1/3$与整体相似，这里$N = 2$，则

$$D_s = \ln N \Big/ \ln \frac{1}{\beta} = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309\cdots \quad (4\text{-}3)$$

计算结果表明，豪斯道夫分维与相似维数完全一致。

仿照上述操作，若取一线段四等分，舍去中间两段，保留下的两侧，再按原法分割取舍，于是产生另一康托尔点集，其分维为

$$D_f = \ln 2 / \ln 4 = 1/2 \quad (4\text{-}4)$$

按照上述方法操作取舍，若把一线段$n$等分，舍去中间$n-2$段线段，保留两侧的两段，则

$$D_f = \ln 2 / \ln n \quad (4\text{-}5)$$

当$n$趋于无穷大时，$D_f$则趋于零。

表4-1给出若干$n$与$D_f$相对应的数值，可以看出，随着$n$的增大，分维$D_f$趋于减小。

表4-1　$n$与$D_f$的对应数据

| $n$ | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|
| $D_f$ | 0.6309 | 0.5533 | 0.5000 | 0.4600 |

## §4.2 谢尔宾斯基线集

早在本世纪之初（1915—1916）年，俄国数学家谢尔宾斯基就曾构造出一些被传统数学排斥在外的所谓病态图形。它们分别被命名为谢尔宾斯基垫片，地毯和海绵。

### 4.2.1 谢尔宾斯基垫片

先介绍谢尔宾斯基垫片的构造方法。其形成过程如图4-4。



图4-4 谢尔宾斯基垫片的构造

取一个正三角形，将其四等分，舍去中间的一个三角形（图4-4)。然后对保留下的三个小三角形分别按同样的方法操作取舍，如此反复操作下去，直至无穷。显然这个几何对象的面积趋于零，而线段的总长度和线段数目趋于无穷大，成为一个线集。

下面来分析这个线集的特点。

**1. 自相似性**

经过无穷次分割舍弃后所形成的图形，其局部与整体是完全相似的。如图4-5中圆周圈出的局部与整体具有严格的相似性。也就是说，按上述规则构造的图形是一种有规分形。

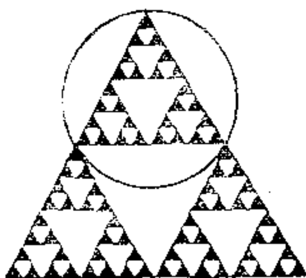


图4-5　局部与整体相似

2．无标度性

在无穷分割舍弃过程中形成具有无限嵌套的自相似结构，这样的分形结构中不存在特征长度。当用照相机对它进行拍照时，用不同的放大倍数，所得到的照片是相似的，而且从照片上无法判断所用相机的放大倍数。这就是无标度性。显然，系统的无标度性是建立在系统内部具有无穷尽的相似的内部结构的基础之上的。

3．分维性

随着分割舍弃操作的无限延续，小三角形的数目越来越多，空隙也越来越多。于是线段（大大小小的三角形边）数目越来越多，长度越来越短，而线段的总长度越来越长，图形的面积越来越小。在极限的情况下，图形的面积趋于零，线段总长度趋于无穷大。换句话说，当用1维的尺子去度量时，测量得到的值是无穷大；用2维的尺子去度量时，测量得到的值是零。这些实际上已在第三章讨论过。可见这个图形的维数应介于1与2之间。

我们来具体计算此图形的分维，设想从一个小的三角形开始，将其每边放大2倍，由于线集具有自相似性，所以将得到与之自相似的大三角形，面积为小三角形的4倍，已约定中间的一个小三角形舍去，因此实际上几何对象的面积为小三角形的3倍。所以$L=2, K=3$。利用式（3-2），线集的

分维为

$$D_f = \ln 3/\ln 2 = 1.5849\cdots \tag{4-6}$$

这也就是谢尔宾斯基垫片的分维值。

### 4.2.2 谢尔宾斯基地毯

谢尔宾斯基地毯也是一种线集。取一正方形，将它等分为9个小正方形并舍弃中央的一个小正方形（图4-6），保留下来的8个小正方形各自再9等分为更小的9个正方形，同样舍去中央的正方形。按此规则不断细分舍弃，以至无穷，其极限图形称为谢尔宾斯基地毯。很象一张编织精细无比的地毯。极限图形的面积趋于零，而小正方形的数目趋于无穷，作为小正方形边的线段数目趋于无穷，实际上是一个线集，图形具有严格的自相似性和无标度性。其分维介于1与2之间。



图4-6 谢尔宾斯基地毯的构造

为了求其分维值，可改变考虑方法，从一小正方形出发，将其每边扩大3倍，则形成一个面积9倍于小正方形的大正方形，然后舍去中央的一个小正方形。于是$L=3$，$K=8$，则分维$D_f$为

$$D_f = \ln K/\ln L = \ln 8/\ln 3 = 1.8927\cdots \tag{4-7}$$

### 4.2.3 维则克图形

由维则克提出的维则克图形（图4-7）也是一种线集。取一正方形，作9等分操作后，舍去边上中间的4个小正方形，保留下来的5个小正方形，按此规则重复操作直至无穷。显然，最终形成一个线集，其分维为

$$D_f = \ln 5/\ln 3 = 1.4650\cdots \tag{4-8}$$

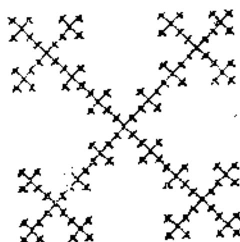


图4-7 维则克图形

如果将正方形9等分后，保留边上中间的4个小正方形，而舍弃其他5个小正方形，则得到另一种线集，容易计算其分维

$$D_f = \ln 4/\ln 2 = 1.262\cdots \tag{4-9}$$

## §4.3 谢尔宾斯基面集

构造谢尔宾斯基海绵原则上是容易的，取一立方体，第一步把立方体27等分后，舍去体心的一个小立方体和六个面面心的小立方体，保留20个小立方体（图4-8）。第二步再对20个小立方体作同样处理，此时保留下来的小立方体数目为20×20＝400个。如此反复操作，直至无穷。于是在极限情况下其体积趋于零，而表面面积趋于无穷大，所以实际上得到一个面集（图4-9）。是一个具有自相似性内部结构的分形系统，其分维介于2与3之间。因为用3维尺度来测量时，体积为零，而用2维尺度去测量时，面积为无穷。与点

集和线集的考虑相类似，假定从小立方体出发，每个棱边放大3倍，则体积放大27倍，由于约定舍去体心处一个小立方体和六个面心处的小立方体，所以实际得到20个小立方体，故面集的分维为$D_f = \ln 20/\ln 3 = 2.7268\cdots$。

由于经历无限操作，因此此几何对象成为多孔的类海绵状结构，所以称为谢尔宾斯基海绵。

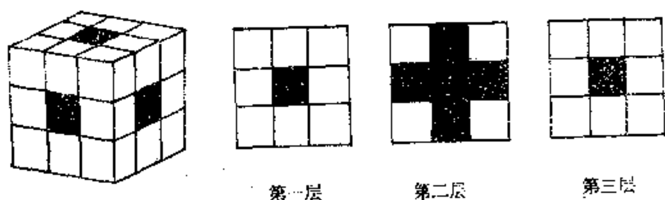



图4-8　谢尔宾斯基海绵的构造

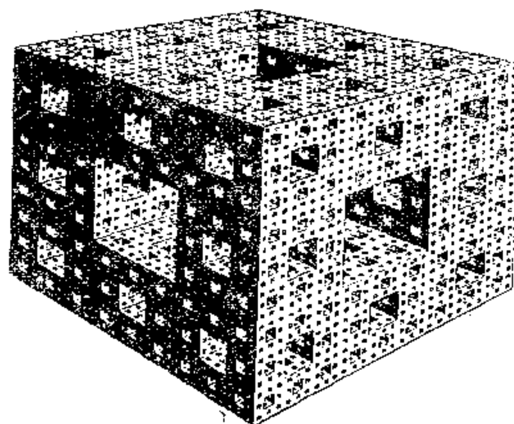


图4-9　谢尔宾斯基海绵

## §4.4 柯曲雪花

传统几何曲线是光滑的，具有处处连续，处处可微（可以微分）的特点。本节要介绍几种所谓魔线，其特点是处处连续，但处处不可微。这使传统数学陷入危机。分形论对这类魔线作出了恰如其分的分析，给出定量的分维值。

### 4.4.1 柯曲折线

这是一条年近九旬的老折线，是由瑞典数学家柯曲于1904年构造的魔线。称之为魔线是因为这条折线虽然处处连续，但处处不光滑，处处不可微，人们认为这类曲线变化多端，不好理解，难以掌握，排斥于传统几何学研究对象之外，故称之为魔线。

构造这类曲线是从初始元出发，如取一条线段或一个源多边形。原则上是按一定规则变线段为折线，形成生成元，分形的结构也就确定了。

柯曲折线的构造方法是这样，如图4-10，设$E_0$是单位长度的线段，$E_1$是由$E_0$舍去中间1/3的线段，而改变成夹角为60°的两段等长（长度为原线段的1/3）的折线。即在被舍弃的线段上形成等边三角形的两个边。这样$E_1$包含 4 个线段。同样的操作舍弃方法对$E_1$的每个线段就构造出$E_2$。如此继续下去，以至无穷。于是$E_k$是把$E_{k-1}$的每个线段中1/3用等边三角形的两个边取代而得到的，当$k\to\infty$，折线序列趋于极限曲线$F$。

柯曲折线的性质与康托尔集相类似。在极限情况下称$F$

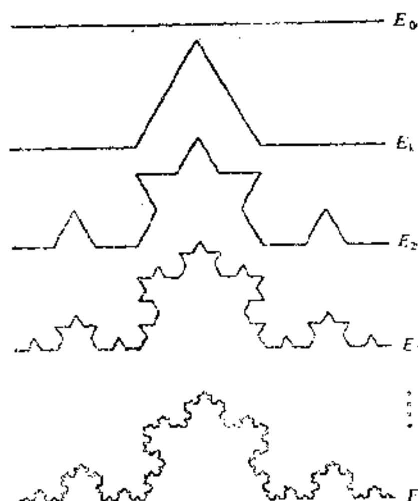


图4-10 柯曲折线的结构

为曲线，但它是如此不规则，以至于在传统的意义下不存在任何切线。尽管它的结构复杂而奇异，但仍然源于简单的结构。它由4个与整体相似的局部组成，相似比为1/3。它在任何尺度下的不规则性反映了它的精细结构。容易计算$E_k$的长度

$$L=(4/3)^k \tag{4-10}$$

当$k\to\infty$时，有

$$L=\lim_{k\to\infty}(4/3)^k=\infty \tag{4-11}$$

表示$F$的长度是无穷大。另一方面，$F$在平面内的面积为零。所以，长度和面积都未能对$F$的形状大小提供有效的描述。

### 4.4.2 柯曲雪花

构造柯曲雪花与折线的构造相类似，以一三角形为源多边形，即初始元，如图4-11，将三角形的每一边三等分，舍去中间的1/3，然后按柯曲折线的生成规则，产生生成元（图4-11(*b*)）。图4-12是柯曲雪花的形成过程。从源多边形（三角形）开始，第一步形成六角星形，第二步是将六角星的12个直线边按柯曲折线生成规则进行同样的操作。依此类



(*a*)



(*b*)

图4-11 柯曲雪花的源多边形(*a*)与生成元(*b*)

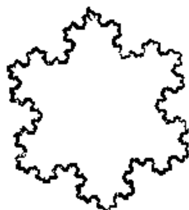


图4-12 柯曲雪花的形成

推，直至无穷。在极限情况下，折线成为曲线，组成曲线的各个折线段趋于无穷小，所以它虽是处处连续的，但处处无切线，不可微。因为雪花的构造过程每一步演变都使折线的总长度增加，所以在极限情况下，柯曲雪花的轮廓线总长度趋于无穷，可是，它是一条闭合曲线，因此雪花面积有一个确定的值，通过简单的计算，有

$$S=1+3\left(\frac{1}{9}+\frac{4^1}{9^2}+\frac{4^2}{9^3}+\cdots\right)$$

$$= 1 + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{9^{n+1}} = \frac{8}{5} \tag{4-12}$$

这里$n=0$相当于图形演变过程的第一步，$n=1$为第二步，以此类推。

利用相似维数$D_s$容易计算柯曲折线或柯曲雪花曲线的分维。由于图形演变的每一步都按相同规则，所以，只要从分析分形元入手就可以计算分维。考查源三角形的任一边，经三等分后去掉中间1/3，作凸出的一个角，形成由4段组成的分形元，每一段都以相似比1/3与原边长相似。所以$N=4$，$\beta=1/3$，则分维为

$$D_s = \ln N/\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) = \ln 4/\ln 3 = 1.2618\cdots \tag{4-13}$$

柯曲雪花生成过程生成元的凸角向外，形成正常的类雪花形状。若分形元的凸角向源三角形内部，则形成反雪花曲线。反雪花曲线仍为闭合曲线，但长度为无穷，而所包围的面积却是定值，可以证明面积为源三角形的2/5。分维与正常的柯曲雪花曲线相同。

### 4.4.3 柯曲岛边界

现在来构造另一种柯曲折线，因为这种折线在极限情况下，酷似海洋中的岛屿，所以称为柯曲岛，边界线称为柯曲岛边界线。这种曲线可以用来模拟海岸线，是海岸线的很好逼近。

我们以单位正方形为源多边形。正方形每边6等分后，按图4-13所示生成元进行演变。可以看出生成元包含18

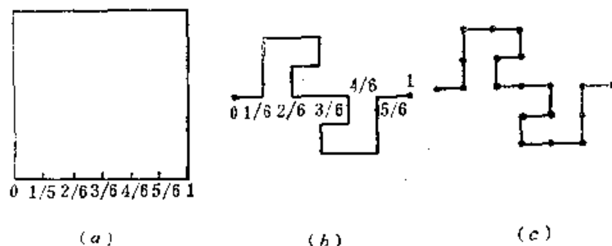



图4-13　柯曲岛的源多边形与生成元

个长度相等的局部，局部以1/6的相似比与整体（正方形的边）相似。所以$N=18$，$\beta=1/6$，于是分维为

$$D_s=\ln N/\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)=\ln 18/\ln 6=1.6131\cdots \qquad (4\text{-}14)$$

图4-14是柯曲岛的构造过程。图4-15是十字形柯曲岛。源多边形为单位正方形，从所示的生成元可知$N=32$，$\beta=1/8$，则

$$D_s=\ln N/\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)=\ln 32/\ln 8=1.666\cdots \qquad (4\text{-}15)$$

图4-16是方形柯曲岛的图形，源多边形为单位正方形，

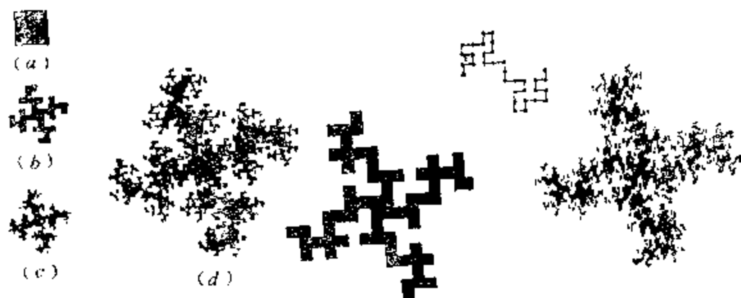



图4-14　柯曲岛的形成　　　　图4-15　十字形柯曲岛

从图示分形元可知，$N=98$，$\beta=1/14$，所以

$$D_s=\ln N/\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)=\ln 98/\ln 14=1.7373\cdots \quad (4\text{-}16)$$



图4-16 方形柯曲岛

容易看出，这些岛与康托尔集具有类似的性质。在任何尺度下都具有复杂的不规则性，在极限情况下有无穷精细结构，在所有层次上都具有自相似性。然而，尽管整体具有错综复杂，奇异多姿的结构，却源于一个基本的简单分形元结构。虽然构造的曲线是合理的，但它是如此不规则，以至于在传统意义下没有任何切线。总之，具有分形结构的应有性质。

## §4.5 来自伊斯兰教的启示

在伊斯兰教地区曾发现许多瓷砖图案，意大利数学家皮亚诺以这些瓷砖图案为基础构造出复杂的曲线。后来人们相继构造出多种这类曲线，为纪念皮亚诺的首创，统称皮亚诺曲线。图4-17是由德国数学家希尔伯特设计构造的曲线。按图示过程构造，直至无穷，曲线的长度趋于无穷，曲线填满整个正方形，有两个端点，永远不与正方形的 4 个边接触。其分维$D_f=2$。

此外，还有多种构造规则分形的方式，如图4-18是在构

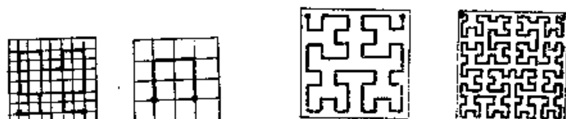


图4-17 皮亚诺曲线

造过程用两种不同的相似比$\beta_1$和$\beta_2$而形成的图形。这是自仿射分形。讲一讲自仿射集的迭代构造方法。源多边形为正方形，12等分后，相间地舍弃6个小矩形，保留6个小矩形。在第$k$步$E_k$的每一个矩形被$E_1$中的矩形仿射相似形所取代。由于水平方向的收缩率比垂直方向要小。当$k\to\infty$时，$E_k$中每一个矩形的宽高比$w/h\to\infty$。图4-18是自仿射集构造过程示意。显然$E_k$包含$6^k$个面积为$3^{-k}\times 4^{-k}$的小矩形。有的则更为复杂，如图4-19所示的朱利亚（Julia）集。朱利亚集是单变量二次复变函数

$$f(Z)=Z^2+C \qquad (4\text{-}17)$$

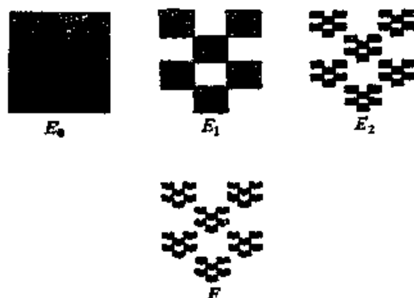



图4-18 自仿射集的构造

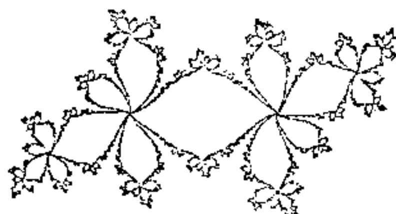


图4-19　朱利亚集

的图像，其中$C$是适当的常数。这种集虽不如康托尔集或柯曲折线等所具有的那种严格的自相似性，但它具有拟自相似性，即这种集的任意小的部分可以放大，然后平滑地变形，使之与这个集的某一较大的部分相一致。

图4-20表示函数

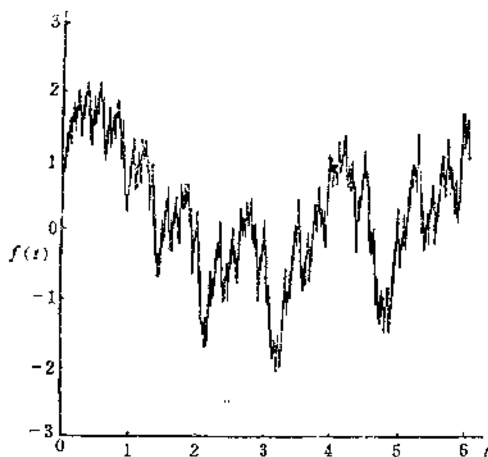



图4-20　复杂函数的图形

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}\sin\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right] \tag{4-18}$$

的曲线图形。无穷项求和使得函数具有精细结构，这样，具有无穷层次相似结构的曲线无法用经典的微积分来研究。这类函数成了分形论的研究对象。

现在作一简要的总结。对康托尔点集，每操作一次，线段长度减为原来的2/3，线段数增加为原来的 2 倍。反复无限操作，长度趋于无穷小，点数趋于无穷大。所以分维介于 0 和 1 之间；对谢尔宾斯基线集，每操作一次，面积减为原来的3/4，总边长增为原来的3/2。无限操作下去，面积趋于无穷小，边长趋于无穷大。所以分维介于 1 和 2 之间；对谢尔宾斯基面集，反复无限操作，将使体积趋于零，而其表面面积趋于无穷大。所以其分维介于 2 和 3 之间；对柯曲折线，每操作一次，线段长度增为原来的4/3，线段总长和线段数目也在增加，无限操作，则趋于无穷大。所以分维应大于1，但小于2。从所得到的各种奇异的几何构型还可以看出，它们都分别由无穷多个自相似的内部单元组成，任何一次操作后，得到的几何构型都是原来图形的翻版。

上面介绍的分形与分维的一些具体例子，虽构造奇异，却是按一定规则构造的，属规则分形。实际情况往往是随机的、无序的系统，要复杂得多。

综合分析本章介绍的各种自相似分形图，可以得出关于分形的一些重要的性质。

1° 分形系统具有精细结构，存在有任意小比例的细节。

2° 分形系统具有自相似性，可能是严格的相似性，也

可能是近似的或统计意义上的相似性。

3° 分形系统是如此的不规则，以至于其整体和局部都不能用传统的几何学加以描述。

4° 分形系统的分维$D_f$大于或等于拓扑维数$D_t$。

5° 大多数情形，分形系统以十分简单的方法定义，或产生于迭代过程。

自相似分形为我们提供观察自然界的分形模型，但正如自然界不存在真正的直线和圆一样，事实上自然界不存在严格的自相似分形。因为当用充分小的比例去观测事物时，它们的分形特征消失了。然后在一定的比例范围内，它们却表现出分形的性质，对这样的客体我们有理由认为是分形体系，并加以深入研究。

# 第五章 随机分形

自然界众多造型奇异的山脉、江河、大陆和岛屿，是大自然本身描绘的图画。连绵起伏的山脉轮廓线，曲折婉延的江河川流，频繁演变的海岸线，变幻无常的布朗微粒运动轨迹等等，都是分形系统。但是这类曲线不同于上章所介绍的规则分形曲线，在那里各种分形曲线都是数学家们按一定规则构造出来的，具有严格的自相似性，是自相似分形集。而这类曲线的自相似性是近似的或统计意义上的相似；这种自相似性只存在于无标度域，超出无标度区域，自相似性不复存在，于是也就不能用分形论进行分析。这类曲线为随机分形。也就是说，随机分形只存在于无标度域内。

## §5.1 随机性与不可逆性

变幻多姿的大自然界和奇异复杂的现实世界不断地发生自然的和社会的许许多多现象，令人眼花缭乱，但所有的现象可以分两大类。一类现象，在一定条件下是必然要发生的决定性现象；另一类现象，是不能预知确切结果的随机性现象。

例如向上抛出一块石子必然要落到地上，荷载异性电荷的物体必然相互吸引等等。这类现象为决定性现象。还存在另一类现象，例如当你向上抛出一枚硬币时，它必然下落，

这是决定性的，但到底正面朝上，还是反面朝上，却是不能预先知道的。你在同样条件下，抛掷硬币多次，每次抛掷之前都无法肯定抛掷的结果是什么。其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上。这类现象似乎毫无规律可言，但在大量反复实验中，发现其结果呈现出某种规律性。

了解了随机性现象的客观存在之后，下面进一步讨论随机性与不可逆性之间的联系。

玻尔兹曼的著名方程

$$S = K_B \ln P \tag{5-1}$$

建立了熵$S$与概率$P$之间的函数关系，式中$K_B$是玻尔兹曼常数。这里我们看到熵随着概率的增大而增大。

我们来讨论埃伦法斯特夫妇(P *and* T Ehrenfest)提出的“罐子模型”。考虑有$N$个球分布在两个容器$A$和$B$中。每隔一定时间，任意选择一个球，从一个容器转移到另一个容器，设在$t_i$时刻有$k$个球在$A$容器中，有$N-k$个球在$B$容器中，那么在$t_i+1$时刻，$A$容器中可能有$k-1$或$k+1$个球（图5-1）。这样，可以写出由$k$个球变为$k-1$个球的转移概率为

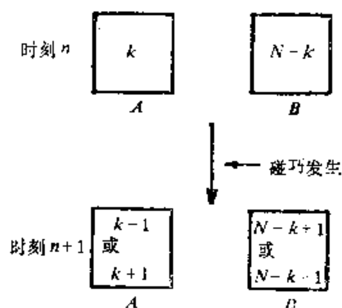


图5-1 罐子模型

$$P(k-1) = k/N \tag{5-2}$$

而由$k$个球变为$k+1$个球的转移概率为

$$P(k+1) = 1-k/N$$

继续上述实验，交换球所达到的结果将是玻尔兹曼

最可几分布。当球的数目$N$很大时，球的分布应是每个罐中有$N/2$个球。即两种可能的转移率相等

$$k/N=1-k/N \tag{5-3}$$

所以

$$k=N/2 \tag{5-4}$$

埃伦法斯特模型是马尔可夫过程，也称马尔可夫链。这个过程以俄国数学家马尔可夫命名，他和庞加莱是最早论述这个过程的两位数学家。这种过程的特点是存在确定的转移概率与系统先前的历史无关，即系统（过程）在时刻$t_0$所处的状态为已知的条件下，过程在$t>t_0$的时刻所处状态的条件与过程在$t_0$时刻之前所处的状态无关。马尔可夫链可以用熵进行描述。假定在容器$A$中找到$k$个球的概率为$P(k)$，引入与熵$S$直接相关的量$\mathscr{H}$，$\mathscr{H}$随时间均匀地变化，犹如孤立系统的熵变化一样。图5-2给出一个$\mathscr{H}$随时间$t$减小的例子，而熵$S$随时间$t$而增大，也就是说，这里$\mathscr{H}$起着$-S$的作用。

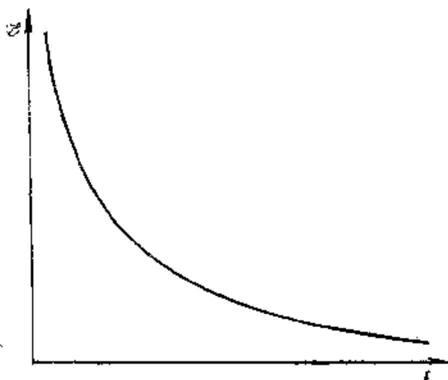



图5-2 $\mathscr{H}$随时间$t$变化

在数学上定义$\mathscr{H}$是给出时刻的概率和在平衡时的概率之差。推广埃伦法斯特模型，考虑一个正方形的划分问题，把正方形划分成许许多多不连接的小区域，然后考虑粒子在其中的分布。把在区域$k$找到粒子的概率记为$P(k,t)$，把达到均匀状态时的概率记为$P_{eqm}(k)$，则定义

$$\mathscr{H}=\sum_{k}P(k,t)\ln\frac{P(k,t)}{P_{eqm}(k)} \qquad (5\text{-}5)$$

举个例子，设正方形划分为8个区域，则$P_{eqm}(k)=1/8$，假定此时粒子都在第一个区域中，相应的概率为$P(1,t)=1$，而其余的区域都为0，代入式（5-5），则$\mathscr{H}=\ln\left[\frac{1}{(1/8)}\right]=\ln 8$。随着时间的推移，粒子分布成为均匀的，则$P(k,t)=P_{eqm}(k)=1/8$，则$\mathscr{H}=0$。从图5-2可以看出$\mathscr{H}$的值是以均匀的方式下降的，所以起着$-S$的作用。这里$\mathscr{H}$均匀下降是概率分布，而概率分布是不可逆的，所以马尔可夫链导致时间的单向性。这与量子力学中的时间演变不同，在量子力学中波函数$\psi$虽与概率有关，但其演变是可逆的。所以，随机过程和不可逆性之间紧密相关。人们常说，机不可失，时不再来，因此，审时度势，把握时机，在解决问题过程中必须倍加重视；可能也是人们走向成功之路的重要环节。

## §5.2 特征尺度与无标度域

世间的事物往往有自己的特征尺度（特征长度，特征时间等），用尺丈量万里长城，或用寸测量人体细胞，都是不合适的，前者显然太短，后者又嫌太长。“杀鸡用牛刀”是形

容尺度用得不恰当的民间俗语，却包涵着凡事物都有自己的特征尺度的深刻寓意。用特征尺度的概念来想事推理，处理问题，可以简便地得出合理的带普遍性的结论。举一个例子，根据特征尺度的概念，来推测电子计算机的小型化会达到什么程度。计算机的核心是集成电路，集成电路的微型化，自然是指元件的微型化，而元件的微型化是以芯片材料（硅，砷化镓等）的原子尺度为极限。所以这方面还存在不小的发展余地。显示屏、键盘和打印机等与人直接发生关系的外部设备，其大小尺寸必须与人体相适应，以便于操作，不能无限缩小尺寸。所以将来的计算机，可能达到只见外部设备运转，不见主机何在的超微型结构的水平。

我们在试图定量地描述自然现象时，往往要建立数理模型，然后求解，获得定量结果。在这整个过程中把握客体的特征尺度是关键的。一个好的模型，常常涉及三个层次。首先是特征尺度决定的基本层次；其次是更大尺度的环境的作用，采用平均场的方法；再次是更小尺度的相互作用，常常涉及物质运动的微观图象。总之，把握好特征尺度，问题得到解决的可能性就更大了。

类似地，在社会科学领域，如以历史学为例。在史料编纂方面的重大贡献之一是把时间分为三种尺度。

1° 地质时间。事件发生的过程长达几千万年之久。

2° 社会时间。这个尺度比地质时间短得多，国家、文化和经济都以这种尺度来测量。

3° 个人时间。这是更短的时间尺度，用来量度人的活动事件。

在社会科学中，对时间的认识在很大程序上依然是不一

致的。各种文化在对时间的想象上是极不相同的。在某些文化看来，时间是循环的，历史永无止境地重演。在另一些文化看来，时间是一条伸向过去和未来的大道，社会沿着大道前进。可能还有别的想象。

进一步考察，还可以发现，每一种文化或每个人都倾向于用一种时间尺度或称“时间视野”去思考问题。一些人只想到目前的事情。例如某些企业承包者只寻求眼前的短期效果，而遭到批评。他们的时间视野受到承包期限的影响。我们当中有些人则计划着较长的时期，憧憬着未来。

事实上，每个社会都表现出它自己特有的对时间的倾向，即对过去，现在或未来强调的不同程度。有的社会生活在过去，有的社会迷恋未来，有的社会强调现在。

容易看到，存在不同的时间尺度，是产生矛盾冲突的一个常被忽视的根源。

再举一些时间尺度的例子。人们在看电视情节剧时，通常能指望在最后5分钟英雄得到美丽的姑娘，或找到无价的财宝，或赢得最后的胜利。电视观众还知道隔一段时间要插入一些商业广告。工业社会儿童也受到时间训练，他会看懂钟表，会区分时间长短。妈妈叫醒他，并告诉他：“再过3分钟该起床了!”这样精确的时间尺度在节奏缓慢的农业社会是没有的，他们会说：“起来吧，太阳上山了。”

尽管不同的社会，不同的文化，不同的人对时间的想象不同，但都有其相适应的时间视野，即是各自对时间的特征尺度。

所谓标度就是尺度，也就是测量的单位。无标度性，就是所研究的客体与尺度无关，无论测量的单位如何改变，研

究的客体性质不发生变化。这初看起来令人疑惑，是否真的存在这样的客体，也就是有没有不存在特征尺度的事物？仔细观察分析发现，自然界确实存在此类事物。对一个没有特征尺度的客体，就必须同时考虑从小到大许许多多尺度（即标度），这自然是很困难的事情。事实上，具有无标度性的体系往往是不同学科中的难题。例如物理学中的相变和湍流就是两个著名的难题。

连续相变、是在温度、压力等控制参数缓慢变化时，物质的宏观状态在某个参数值时，由于对称性改变而发生突变。例如一块处于高温情况下的磁铁，由于其内部微观磁矩混乱取向，故宏观磁矩为零。当温度逐渐下降到临界温度（称为居里点）$T_c$，突然沿着某个方向出现了非零宏观磁矩。体系的对称性降低了。从具有绕一切方向的转动对称性，降到只有沿宏观磁矩方向的一种转动对称性，但体系由无序的非磁化状态进入有序的磁化状态。在这里磁矩之间的关联长度$\xi$是一个自然的特征尺度。磁体中磁矩之间的关联按指数规律衰减，每增大一个关联长度的距离，关联就衰减e倍，即$M \propto e^{-\xi}$，其中$M$是磁矩。在居里点以上，关联长度$\xi$为无穷大。既然是无穷大，那么无论你用大尺度或小尺度去测量，它都是无穷大。也就是说与标度无关，即无标度性。现在假定温度接近居里点，但又不在其上。这时关联长度$\xi$虽然不是无穷大，但仍很大。所以，在居里点附近，小于关联长度$\xi$，大于微观尺度的范围内，系统具有近似与尺度无关的无标度性，此范围称为无标度域。

实际上，无标度域指明自相似性存在的尺度范围。第三章（§3.2）中已经讲述过豪斯道夫维数的定义，$N(r)=$

$A/Cr^{D_f}$，式中$r$是对某分形客体进行测度的尺度，$N(r)$是测度所得到结果，$A$是客体的广义体积，$C$是客体的结构因子。对上式取对数有

$$\ln N(r)=\ln A-\ln C-D_f\ln r \qquad (5\text{-}6)$$

以$\ln N(r)$与$\ln r$关系作图得到的曲线，可以对客体是否具有分形性和在多大范围内具有分形性作出判断。图5-3是示意图。可以看出，在曲线的（$a$,$b$）区域为直线部分，说明在此区域内体系具有自相似性，超出此区域则不具有自相似性，也就是不能认为是分形体系。这个具有自相似性的区域称为无标度域。

对天上云彩边界的几何性质进行研究的结果表明，存在1km到1000km的无标度域。为什么云彩存在无标度域？这是可以理解的，因为小于1km的云朵，当云朵投影在地面上要受到地形地貌的影响，大于1000km的云朵，经投影后，要受地球曲率的影响。可见在大小两端受到特征尺度的限制，中间有三个数量级的无标度域，已经足够宽了。分形性质就存在于此无标度域之内，实际测量的分维$D_f=1.35$。其他随机分形体系也同样具有上下两端的限制，分形性质只存在于无标度域内。

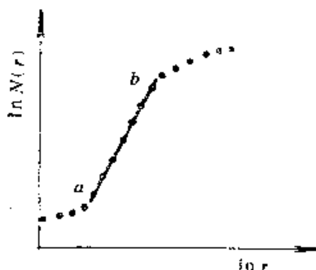



图 5-3 无标度域的示意图

## §5.3 海岸线的分形性质

曼德布罗特对海岸线的深入思考导致分形概念的提出。我们已经知道，曼德布罗特曾在美国《科学》上发表文章论述英国的海岸线有多长。分形思想由此萌芽生长。这篇文章的结论令人惊诧：英国的海岸线长度是不确定的，它依赖于测量时所使用的尺度。由于海水的冲刷和陆地的运动，海岸线是由大大小小的海湾组成，非常不规则，其长度的实际测量十分困难。如果用公里作测量单位，从几米到几十米的一些弯曲就被忽略了。测量结果为$L_1$。若改用米作测量单位，则测量结果要精确多了，可以测量出很小的弯曲，但更小的弯曲，如厘米量级的弯曲就被忽略了。测量结果$L_2$当然大于$L_1$。若用厘米作测量单位，那将测量出能看到的所有曲折。测量的总长度$L_3$当然比前两个结果都大，即$L_3>L_2>L_1$。所采用尺度的最小极限不过于海岸上砂粒的原子大小。使用更小的尺度也就没有意义了。对英国的海岸线，取大不列颠岛外缘几个突出点，用直线把它们连起来，得到的结果是海岸线总长度的下限。可见海岸线作为一种具有各种层次不规则的实际事物是十分复杂的几何对象。所以在选择尺度时，在大小两端都存在自然限制。在这两个自然限制之间是无标度域。在无标度区域内，长度显然不是海岸线的很好的定量特征。因为测量其总长度时，得到的结果随尺度不同而变化。换句话说，海岸线的总长度是不确定的，所以，必须寻找更能表征其特征的参量。

当我们乘坐飞机在空中俯瞰海岸线时，就会发现，在不

同飞行高度上观察海岸线，其形状大致是一样的。例如在10000m高空拍摄的海岸线照片，与在2000m拍摄的海岸线照片，大致上是相象的。两者视野不同，但两张照片在统计意义上都是相似的。从远处，在大范围看到的复杂性，当靠近时，在小范围仍可发现同样的复杂性。也就是说，海岸线具有自相似性，因此是一个分形体系。这就是说，在无标度域，尺度未能表征海岸线的复杂性。现在要问，用什么参量可以更好地表征其复杂程度？我们将看到，分维是一个更好的参量。

假定有一张绘制得十分精确的某海岸线地图，可以用圆规来测量其长度。我们固定圆规两脚开度为$r$，然后沿着海岸线一步一步地测量。若测量得到的步数为$N(r)$，则海岸线的长度$L(r)$可以写成

$$L(r)=N(r)r \tag{5-7}$$

根据第三章的阐述，在无标度域$N(r)$与$r$有如下关系

$$N(r)=C(1/r)^{D_f} \tag{5-8}$$

式中$D_f$是分维，$C$是常数。把式（5-8）代入式（5-7），有

$$L(r)=Cr^{1-D_f} \tag{5-9}$$

于是把分维$D_f$引入了测量海岸线总长度的式子。这里我们看到，$D_f$刻画了海岸线总长度$L(r)$随着测量单位$r$变化的快慢，也就是描绘海岸线曲折的复杂程度。经过实际测量在双对数坐标纸上作$\ln L(r)$对$\ln r$的曲线，由曲线的直线部分的斜率$R=1-D_f$，即可得到分维$D_f$值，选定测量单位，就可以确定海岸线的总长度。

曼德布罗特的研究工作给出，澳大利亚海岸线$D_f=1.13$，

南非洲海岸线$D_f=1.02$，英国西海岸线的分维$D_f=1.25$，西班牙与葡萄牙的国界线$D_f=1.14$，分别表示在图5-4中的（*a*），（*b*），（*c*），（*d*）。可见，各具不同弯曲程度的海岸线其曲折的复杂性反映在分维值$D_f$的大小中。而$D_f$值可以通过计算获得，这样问题就解决了。且慢，实际上还有没解决的问题，既然海岸线是不规则的，又怎么能进行计算呢？也就是海岸线是自然形成的无规则分形，如何作数学计算？实际计算时，仍然将用有规则分形曲线作为模型，照此模型进行计算。

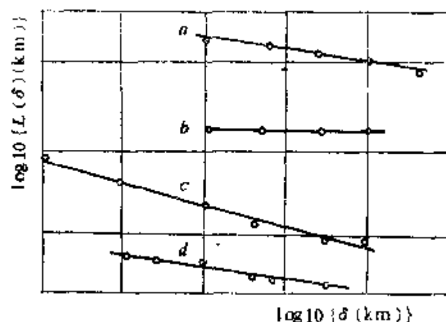



图5-4 海岸线分维测量

计算模型常用柯曲折线，不同的生成元会产生形态各异的海岸线模型。图5-5是几种海岸线模型的生成元，其初始元皆为[0，1]单位长度的光滑线段，图中给出了各自的分维值。图5-6为分形元（*e*）经四次演变后所形成的海岸线模型；无穷操作演变，则将形成无穷嵌套自相似序列的奇异复杂的海岸线。但其分维的计算却出自简单定义。

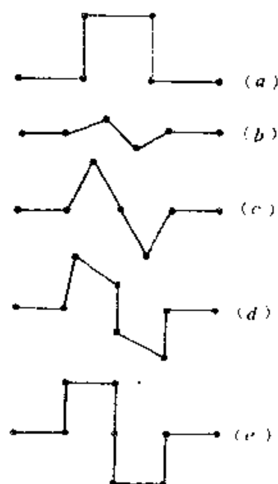



图5-5　几种海岸线模型的生成元

(a)　$D_s=\frac{\ln 5}{\ln 3}=1.4649\cdots$；　　(b)　$D_s=\frac{\ln 5}{\ln 4}=1.1609\cdots$；

(c)　$D_s=\frac{\ln 6}{\ln 4}=1.2924\cdots$；　　(d)　$D_s=\frac{\ln 7}{\ln 4}=1.4036\cdots$；

(e)　$D_s=\frac{\ln 8}{\ln 4}=1.5$

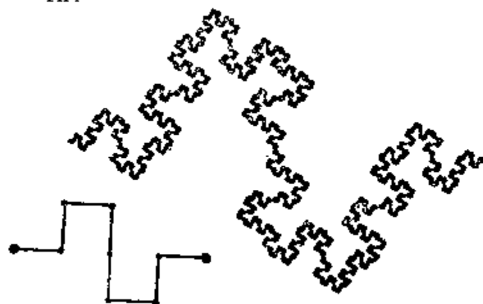


图5-6　一种海岸线模型

## §5.4 城市边界的变迁

城市边界受到多种因素的影响，随着时间的推移，这些因素在不断变化，其中包括政治变化、战争、城市发展、工业交通、运输状况，建筑技术、社会管理及自然生态环境约束等。由此可见，城市边界的变迁过程，能够得到多方面的信息。

地理学家和市政规划工作者在实际工作中发现，城市边界线的形状由于多种因素的制约，常常是很复杂的，有时具有分形的特征，可以用处理海岸线的方法来处理城市边界线，同样可以计算其分维。随着时间的流逝，城市边界线发生变化，分维值也随着变化。于是分维值与城市的历史进程相联系。通过分维$D_f$的研究，就可以捕捉到许多曾在这个城市发生过的历史事实。

英国威尔斯大学理工学院市镇规划系主任巴迪教授对城市边界变迁的分形性质作过研究，得到有意义的结果。他曾对加的夫的三张不同年代（1886年，1901年和1922年）的精确军事地图作了分析，分别计算了这三个时期城市边界线的分维值。

图5-7为加的夫市1886年，1901年和1922年的边界图。与上节讲过的海岸线类似，如式（5-9），其边界线的总长度$L(r)$与标度$r$的关系为$(Lr)=Cr^{1-D_f}$，或写成

$$L(r)=Cr^{-a} \qquad (5\text{-}10)$$

式中$a$称为标度指数，与分维的关系为

$$a=D_f-1 \qquad (5\text{-}11)$$

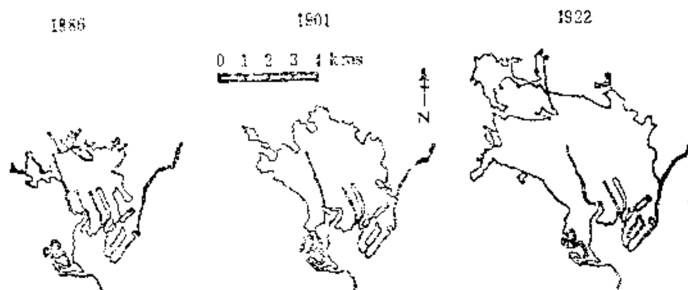



图5-7 加的夫市边界演变

作$\ln L(r)\sim\ln r$的曲线图5-8，发现在三个时期$\ln L(r)$与$\ln r$之间并不存在严格的直线关系。说明分维$D_f$与标度有关。可以假定

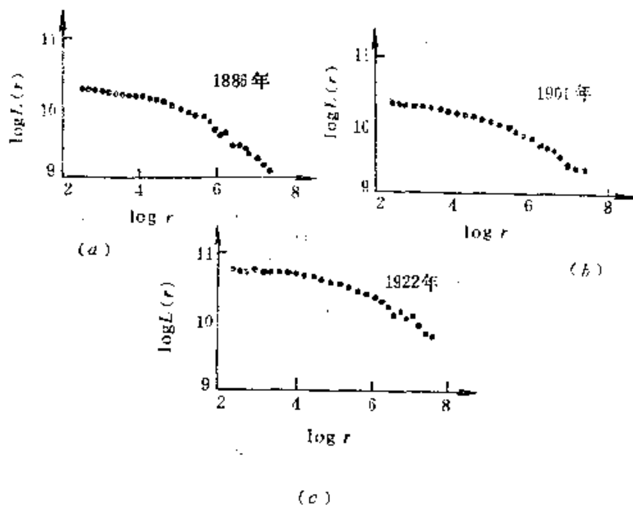



图5-8 加的夫市边界周长与标度的关系

$$\alpha = \lambda + \eta r \tag{5-12}$$

式中$\lambda$和$\eta$都是常数，比较式（5-11）与式（5-12）有

$$D_f = 1 + \lambda + \eta r \tag{5-13}$$

显然，$D_f$随$r$变化，当$r$增大时，分维$D_f$也随着增大，如图5-9所示。

从图5-9可以看出，加的夫市边界线的分维值，三个时期依次下降，特别是1886年到1901年之间分维值有较大的跌落。研究表明，这个时期人口大大增长，从80000增长到230000，城市规模迅速扩大；城市交通发展，电车系统形成；住房建筑风格发生显著变化，维克多利亚时代的建筑风格被更宽敞的郊外建筑所取代；19世纪中期，支配加的夫发展的地产不再是十分重要的，而工业起更重要的作用，形成工业繁荣昌盛时期。这些历史进程，促使城市加强规划，形成比以往更规整的边界形状，因而使分维值发生跌落，这是符合分形规律的。从这个例子，我们看到城市边界线的随机分形性质，同时也看到分形论应用的又一新领域。

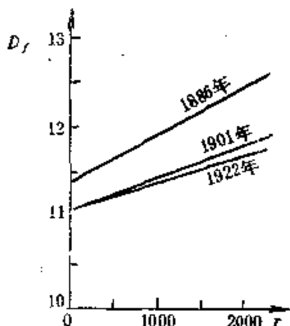



图5-9　分维与标度的关系

上节介绍了利用有规柯曲折线来模拟随机的海岸线。这里介绍随机柯曲折线的生成，图5-10是柯曲折线的随机构造图。在构造的每一步都掷一枚硬币来决定一对新的直线段在折线上的位置。这个随机折线确定具有精细的结构，但有规柯曲折线具有的严格自相似性已被它所具有的统计自相似性

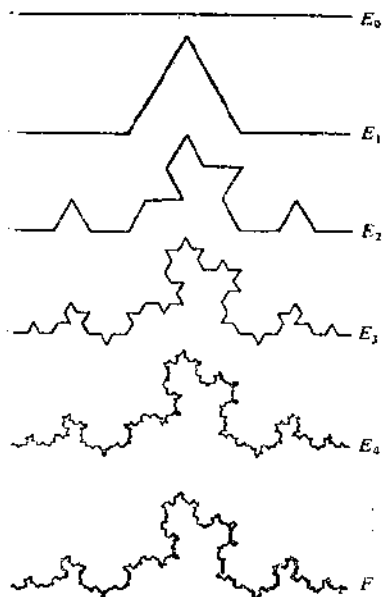



图5-10 随机柯曲折线

所代替。

利用随机柯曲折线来模拟海岸线、国境线和城市边界线可能比规则柯曲折线模型更贴切。

## §5.5 随 机 行 走

随机性是自然界的固有性质，即使是所谓“完美晶体”也有许多杂质原子和晶体缺陷处于随机位置上。实际上，对理想完整晶体，每个原子在空间点阵位置上也是处于热运动

状态，在原子的平衡位置附近作热振动。因此，即使是理想完整晶体也会有一些随机的组元。这样一些过程可以用随机分形来描述，可见就在物理学的最有序的体系中，随机分形也占有一席之地。

随机行走或布朗运动过程在物理、化学和生物学中非常重要。这是一个典型的随机过程，自然界的许多现象与布朗运动相联系。我们将用分形论的观点来分析布朗运动过程。最简单的例子是一维随机行走，其处理方法可以推广到高维空间。

### 5.5.1 看到生命的运动形态吗？

1827年英国植物学家布朗在显微镜下第一次观察到水中一颗微粒在不断地作随机（无规）运动，当时他曾以为是看到了生命的运动形态。经查证并非生命的运动形态，而是一颗落入液体的花粉在大量液体分子的无规碰撞下所表现出的运动状态。从分子运动论的观点看，在任何一瞬间，液体分子从各个方面对花粉微粒发生撞击，由于涨落现象的存在决定了各个方向的撞击是不平衡的。假定某一瞬间，某一方向的碰撞作用较强，则花粉微粒将沿着碰撞力方向运动；在下一瞬间，另一方向的碰撞作用较强，则花粉微粒就沿新的方向运动。这样，花粉在液体中将走一条无规的曲折的路径。

### 5.5.2 随机行走路径的分形性

布朗观察到水中花粉微粒在不停地作无规则运动后，在长达半个世纪的漫长岁月中，人们并不了解这种运动的原因。直到1877年才由德尔索用分子运动论的观点作出正确的

解释。又过了约21年，1908年法国物理学家波兰完成了他的实验工作，对布朗粒子的运动轨迹作了测量。

布朗粒子非常微小，其直径约为$10^{-4}$cm，它受到周围液体分子碰撞不平衡所产生的力足够大，可以使微粒发生运动。粒子越小，布朗运动越显著。由于分子热运动的变化剧烈，产生的碰撞力是涨落不定的，因此粒子的运动轨迹是无规则的。通常每个布朗微粒在液体中受周围液体分子的碰撞次数每秒高达$10^{21}$次，在气体中，由于气体分子的密度较低，布朗粒子受气体分子碰撞的次数要少些，但每秒至少也有$10^{15}$次。在如此频繁碰撞下，粒子的瞬时运动是无法观测的。我们所能观测到的只是宏观短的时间内，微粒的平均运动。

波兰测得的布朗运动轨迹如图5-11。其中图5-11(*a*)是每隔30秒记录下的布朗粒子的坐标，相继两个坐标连成直线，画成布朗粒子的运动轨迹是一条无规则折线；图5-11(*b*)

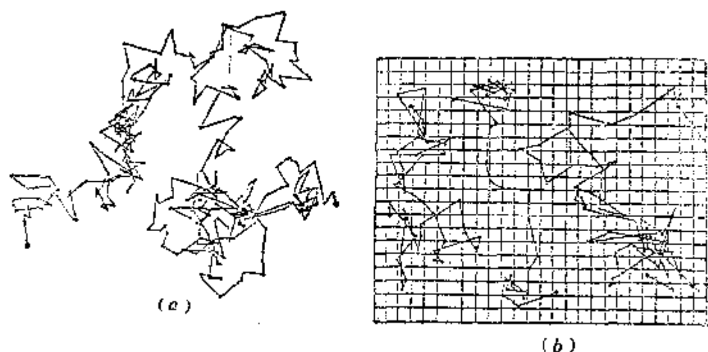



图5-11　布朗运动轨迹

是当他把观测时间间隔改为3秒时的测量结果。发现原来轨迹的一个直线段被一条新的无规则折线所取代了。新的折线与原来的折线有着同等程度的复杂性，二者的形状在统计意义上是相似的，具有分形特性。

### 5.5.3 随机行走的分维

假定布朗粒子在$d$维空间运动，取某一瞬时的位置为坐标原点，当粒子行走$N$步后，粒子运动的总位移矢量$\bar{R}$，应是粒子的每一步的位移矢量$r$的矢量和

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i \tag{5-14}$$

因为空间对称性的缘故，$\langle\bar{R}\rangle=0$，因此，用总位移的均方根$R$的平方来度量布朗运动轨迹的大小。

$$R^2=\langle\boldsymbol{R}^2\rangle=\sum_{i=1}^{N}\langle r_i^2\rangle+\sum_{i\neq j}^{N}\langle\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\rangle \tag{5-15}$$

由于布朗运动的随机性，每一步的位移矢量都是独立的，所以式中第二项为零。再令第一项中的每步位移$r_i$以平均值$b$替代，就得到

$$R^2=Nb^2 \tag{5-16}$$

或

$$R=(R/b)^2$$

这是步数$N$与无量纲约化总位移之间的关系式，与空间维数$d$无关，与式（3-1）比较，$N$相当于$K$，$R/b$相当于$L$，因此，布朗运动轨迹的分维$D_f=2$。

以上推导适合于1维，2维，3维，以及更高维空间。换句话说，在任何空间随机行走的分维都是2。

### 5.5.4 大自然描绘的曲线

曼德布罗特说："布朗运动轨迹是大自然本身描绘的曲线。"

大自然不仅画下稍纵即逝的随机布朗运动曲线，而且构造了能够长期存在的随机分布曲线，共价键结合的线型高分子就是典型的例子。实验上已能测量单个分子链的构像（见图3-10）理论上对高分子链的分形维数可以按两种模型进行计算：

1° 随机行走模型。假定分子链节间没有相互作用，彼此是自由的，与布朗运动相似，用随机行走模型计算，求得的分维$D_f=2$。

2° 自回避随机行走模型。假定分子链节间存在相互作用，用自回避行走模型计算，这样求得的结果，与高分子的欧几里得维数有关。当$d=2$时，$D_f=4/3=1.33$；当$d=3$时，$D_f=5/3=1.66$。

显然，对于欧几里得维数为3的高分子链，用随机行走模型计算时，它的分维为2，而用自回避随机行走模型计算时，它的分维是1.66。这个结果表明，有限制的自回避无规行走轨迹比自由的无规行走轨迹的无规程度要小些。可见，大自然描绘曲线的多样性。

# 第六章　混 沌 现 象

现实世界的绝大部分不是有序的、稳定的和平衡的，而是无序的、变化的和涨落起伏的世界。一切系统都含有不断起伏着的子系统。有时一个小小的起伏或涨落可能由于正反馈而演变成巨大的波澜，使原系统遭受破坏。在这个奇异时刻，或称为分叉点，根本无法预知变化将向何方发展。是分解形成混沌状态呢，还是跃变到一个新的更加细分的有序态？

诺贝尔奖金获得者普里高金(I Prigogine)认为有序可以通过自组织过程从无序和混沌中自发地产生出来——混沌和有序同在。看来我们需要一门新的学科作为凌架于这巨大的知识深渊之上的桥，它的一岸是单个对象——一个水分子、一枝树叉、一个人体细胞、一个神经元——的行为，另一岸是成千成万这类对象的整体行为。分形论将成为这样一座桥，通过分形论去解开混沌之谜。

然而，在短时期内我们还未能看清奇异的混沌之全貌。正如美国加州伯克莱大学蔡少棠教授最近指出："在科学技术史上，从来还没有象混沌现象那样，它几乎无处不在，既是一个普适的范例，又是一个多学科的研究领域。在这座冰山的下面蕴藏着各种极其美妙的具有无限复杂性结构的，如同一个曲折回转而没有终点的几何迷宫或一幅超现实的令人神魂颠倒的内涵深邃的美景。"

## §6.1 蝴蝶效应

1961年冬季的一天，洛伦兹(E Lorenz)在皇家麦克比(Royal McBee)型计算机上进行关于天气预报的计算，为了考察一个很长的序列，他走了一条捷径，没有令计算机从头运行，而是从中途开始。他把上次的输出直接打入作为计算的初值。然后他穿过大厅下楼，去喝咖啡。一小时后，他回来时发生了出乎意料的事。他发现天气变化同上一次的模式迅速偏离，在短时间内，相似性完全消失了。

进一步的计算表明，输入的细微差异可能很快成为输出的巨大差别。这种现象被称为对初始条件的敏感依赖性。在气象预报中，称为"蝴蝶效应"。*今天，在北京有一只蝴蝶搧动一下翅膀，某时刻可能在纽约引起风暴。

图6-1是两组天气模式分道扬镳的实例。先是两条曲线连细节都相同。然后一条曲线稍为落后一点。当到达下一个

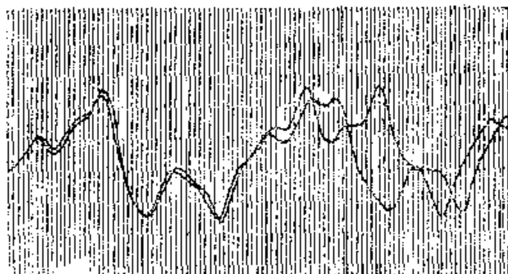


图6-1 两组天气模式分道扬镳

* 洛伦兹1979年12月29日在华盛顿的美国科学促进会的演讲："可预言性：一只蝴蝶在巴西搧动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？"

波峰时相位明显不同。而后所有的相似性都消失无遗，出现非周期的、混乱的输出。

这样,"蝴蝶效应"成为"对初值的敏感依赖性"的同义词。当年洛伦兹所用的Royal McBee计算机每秒钟只能作60次乘法，而Cyber CD205型超级计算机,以每秒钟100万次浮点运算。洛伦兹当时只处理12个方程,而今"全球大气研究计划"计算着50万个方程的方程组。方程组已计入空气凝聚和蒸发时，水份是怎样传入和输出热量的；数值风如何感受到数值山脉的地形。每一小时，从球球各个国家，从飞机，卫星和观测船上源源不断地输入成千上万条数据。美国国家气象中心的预报准确程度居世界第二位，而位于英国雷丁的欧洲中期天气预报中心则是世界最佳预报中心。但计算机模拟的长期气象预报却是注定要失败的。

## §6.2 非线性世界

线性关系是简单的情形，作图时表现为一条直线。例如某大学选修某门新学科的学生逐年增加，服从线性关系。一个线性方程总是可以求解的。非线性方程一般是不可解的。许多物理问题是非线性的，但常常为容易讲解而把非线性项略去使方程成为线性方程。我们来举个例子。

物质总是处于运动状态，物质内部原子也处于运动之中，例如一片半导体硅晶体，其内部硅原子按金刚石晶格结构有序排列，称这些原子为晶格原子。在一定温度下，晶格原子在其平衡位置附近发生振动，称为晶格振动。晶格振动的动力学分析是一个复杂问题。往往设想比较简单的情形加

以讨论，然后推广到3维的复杂情形。假定在晶格中形成一条原子链（图6-2），各原子完全相同，原子质量为$M$，各原子处于平衡位置时，原子间距为$a$，由于热运动各原子在平衡位置作微振动，在某一时刻$t$，第$n$个原子对平衡位置的偏移为$\mu_n$。根据虎克定律，原子将受到恢复力$F$的作用，这相当于图6-2中所示的弹簧的作用。即当原子离开平衡位置时，便有一弹簧把它往回拉。先讨论原子所受到的恢复力$F$与相对位移的关系。

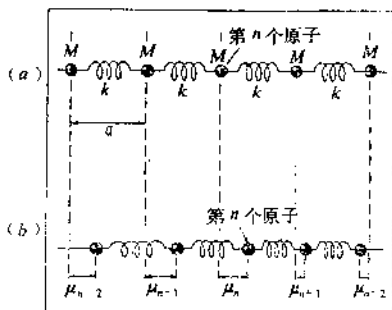



图6-2 原子链

当原子处于平衡位置时，两原子间的相互作用势能为$V(a)$，由于微振动的缘故，两原子产生相对位移$\delta=\mu_n-\mu_{n+1}$，因而相互作用势能变为$V(a+\delta)$。现将$V(a+\delta)$在平衡位置附近按泰勒级数展开：

$$V(a+\delta)=V(a)+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)_a\delta+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\right)_a\delta^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}r^3}\right)_a\delta^3+\cdots\cdots \quad (6\text{-}1)$$

式中$V(a)$是常数，可取为零，在平衡点势能取极小值，所以$\left(\frac{dV}{dr}\right)_a=0$，由于$\delta$是小量，故展开式只保留到二次项，则

$$V(a+\delta)=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_a\delta^2=\frac{1}{2}K\delta^2$$

$$=\frac{1}{2}K(\mu_n-\mu_{n+1})^2 \qquad (6\text{-}2)$$

式中

$$K=\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_a \qquad (6\text{-}3)$$

称为恢复力常数。由式（6-2），恢复力为

$$F=-\frac{dV}{dr}=-K(\mu_n-\mu_{n+1}) \qquad (6\text{-}4)$$

从式（6-4）可以看出，力$F$的大小正比于原子对平衡位置的偏移$(\mu_n-\mu_{n-1})$，其方向与原子对平衡位置的偏移方向相反，这正是恢复力所具有的性质。

我们只考虑相邻原子的相互作用，先来考察第$n$个原子的左方，第$n-1$个原子的作用，第$n-1$个原子与第$n$个原子之间相对位移为$(\mu_n-\mu_{n-1})$，则恢复力为$-K(\mu_n-\mu_{n-1})$；而第$n$个原子右方，第$n+1$个原子的作用，其相对位移为$(\mu_n-\mu_{n+1})$，恢复力为$-K(\mu_n-\mu_{n+1})$。于是第$n$个原子受到的总作用力为

$$F=-K(\mu_n-\mu_{n+1})-K(\mu_n-\mu_{n+1})=K(\mu_{n-1}+\mu_{n+1}-2\mu_n) \qquad (6\text{-}5)$$

这样，就可以写出第$n$个原子的运动方程

$$M\frac{d^2\mu_n}{dt^2}=K(\mu_{n-1}+\mu_{n+1}-2\mu_n) \qquad (6\text{-}6)$$

这是一个简谐振动方程。式中$n=1,2,3,\cdots,N$。即每个原子有一个方程，共有$N$个原子，所以有$N$个方程组成联立方程组。用试解的方法可以得到如下解：

$$\mu_n=A\exp[i(\omega t-naq)] \qquad (6\text{-}7)$$

表明晶体中原子在平衡位置附近微振动形成的振动波以前进波的形式在晶体中传播。称为格波。式中$\omega$是格波的频率，$q$是波数。

可以看到，在建立晶格原子动力学方程的过程中作了一系列简化，而最重要的简化是在势能表达式中忽略 3 次方项，这样恢复力$F$的表达式就成为线性的了，也就是说，这一步简化就使原来是非线性系统变为线性系统。在这样一个线性系统中，原子作简谐振动。根据晶格振动的量子理论，晶格原子振动同声子（*phanon*）相联系，晶格原子的振动能量是量子化的，即振动能是一份一份的，每一份振动能量对应一个声子，声子的能量

$$E=\hbar\omega \qquad (6\text{-}8)$$

因为是简谐振动，所有的振动是线性独立的，所以声子间互相不发生能量交换。这是很自然的，在一个平衡系统中，各子系统是互不相关的。可是，事实上正是非线性项才决定了固体的一系列特性。如热膨胀、比热和热传导等。虽然，其中固体比热还可以用线性振动模型作近似解释，但热膨胀和热传导等性质是不能用线性近似来解释的。实验表明，固体的一系列热学性质应归因于固体内部的非线性振动，即非简

谐振动。

对热膨胀问题，我们考虑一个两个原子的系统，其中一个原子固定在原点，另一个原子在平衡点$r_0$附近作微振动，若原子间的势能曲线对平衡点$r_0$是对称的，即若原子是作简谐振动，也就是这个系统是个线性系统，则不会有热膨胀现象。一块铁，或别的什么，经加热后体积变大，这已成为常识。所以，不存在热膨胀的结论违背了事实。问题出在对势能表达式的简化处理上，即忽略了3次方以上的各项，于是势能曲线成为对称的抛物线，而实际上是不对称的复杂函数。随着原子间距离的减小，排斥力增长很快，而吸引力增长缓慢。如图6-3实线所示。因此，随着温度的升高，固体中原子的平衡位置因热振动而向右移动，发生热膨胀现象。

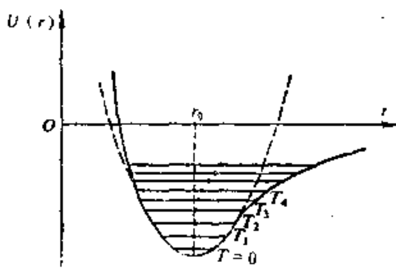



图6-3　原子间相互作用的势能曲线

热传导现象已为我们所熟知，当固体内存在温度梯度时，热量会从高温端流向低温端，形成热流。单位时间通过单位面积的热量称为热流密度。热流密度$Q$与温度梯度$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$成正比，即

$$Q=K\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \qquad (6\text{-}9)$$

式中$K$是固体的热导系数。

现在我们要问，热传导过程是怎样形成的？按小振动理论，固体内部原子振动是互不相关的，完全独立的，各自因振动形成的格波，不受限制地无限传播，不存在声子的有限自由程。换句话说，固体内部不存在热阻，因而热传导变成无穷大。这与事实相违背。事实上，声子之间存在相互作用，在运动过程彼此相互影响。这反映在势能展开式的非简谐项中，正是非简谐效应的作用，使得不同声子之间发生能量交换，最后达到统计平衡，因而限制了声子的自由程。表6-1为石英和氯化钠在不同温度下的声子平均自由程$\lambda$，热导系数$K$和比热$C$。

表6-1　声子平均自由程$\lambda$

| | 取 $\bar{V}=5\times10^5$cm/s | | | |
|---|---|---|---|---|
| 晶　体 | $T$(°C) | $C$(J·cm$^{-3}$·°C$^{-1}$) | $K$(W·cm$^{-1}$·°C$^{-1}$) | $\lambda$(Å) |
| 石　英 | 0 | 2.00 | 0.13 | 40 |
| （平行光轴） | −190 | 0.55 | 0.50 | 540 |
| NaCl | 0 | 1.88 | 0.07 | 23 |
| | −190 | 1.00 | 0.27 | 100 |

固体热传导的公式与气体相同：

$$K=C\lambda\bar{V}/3 \tag{6-10}$$

式中$\bar{V}$为声子的平均速度。显然，因为声子的平均自由程$\lambda$是有限的，所以热导系也是有限的，而不可能是无限的。

通过上述讨论，不难看到，物质世界非线性系统广泛存

在，所以，必须寻找适当的方法才能正确处理非线性问题，而一般不能处处以各种简化把原来是非线性系统当作线性系统加以处理。分形论为处理非线性系统的问题提供新概念和新方法。

传统学科中那些可解系统就是教科书中的线性系统，在那里一切都循规蹈矩，一旦面临非线性问题，则常常以线性近似取而代之。人们很少谈论非线性系统，当遇到这类事物时，总是当做失常情况，而不予理会；其实原来那些作为可解的，有序的、线性的系统才是失常的处理方法。自然界的灵魂深处充满非线性。物理学家费米感叹道："《圣经》里并没有说一切自然定律都可以表示成线性的！"普里高金指出："非线性动力学特性，它在适当的约束下导致运动的不稳定性和分叉现象。"正因此，才显示出大自然的盎然生机。

## §6.3 逐级分叉与混沌

回顾一下本纳德问题，在那里远离平衡态的约束和非线性起重要作用。现在我们考察图6-4的情形，假定图上表示的是某一点流速的垂直分量受约束的影响，或更一般的表示系统的状态变量$x$受控制参数$\mu$影响的情况。

对较小的$\mu$值只有一个解，对应于本纳德实验中的静止状态，即平衡态和渐近稳定的情况。在这种情况下，系统能使内部的涨落和外部的扰动衰减下来。当$\mu$值达到并超过临界值$\mu_c$时，状态变得不稳定了，涨落和外部的微小扰动再也不能衰减了，而相反地被放大了，系统朝着对流态演化，出现一级分叉，在这奇异时刻，系统将走向何方必须进行重新抉

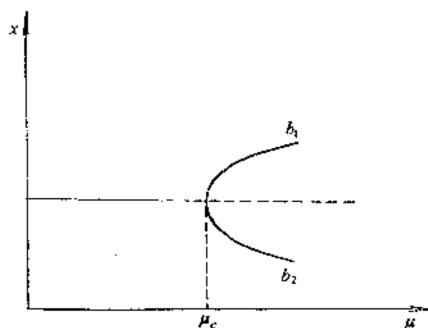



图6-4　变量$x$受控制参数$\mu$的影响

择，相当于在某一区域出现左旋或右旋水花，图上分支$b_1$或$b_2$，这种抉择只有偶然的机遇，通过涨落的动态特性作出决定。

一级分叉发生在把分叉推出稳定性阈值外之时，对流开始按时间振荡；随着与平衡态的距离的进一步增大，越来越多的频率出现了，最后完成向非平衡态的过渡。当$\mu$值越过另一个临界值时，各种频率的振荡相互作用产生大的涨落，对流花纹将变得更为复杂，出现非平衡湍流混沌现象。

学术界已广泛注意到，通向混沌的简单道路是费根鲍姆（M J Feigenbaum）序列。它涉及任何这样的系统，其行为具有普遍性的特点。对参量值的某一确定范围，系统的行为是周期的，周期为$T$；超出这一范围时，周期变为$2T$；当超出另一阈值时，系统以$4T$为周期。如何向前发展，系统以逐级分叉为特点，每一相继的周期为前一周期的两倍。形成一个倍周期（图6-5）特点的通道，当周期无限制的加倍时发生非周期的行为，于是系统从简单的周期行为走向复杂的

非周期行为。我们看到决定论和随机性两种因素同时支配着系统进程的特点。

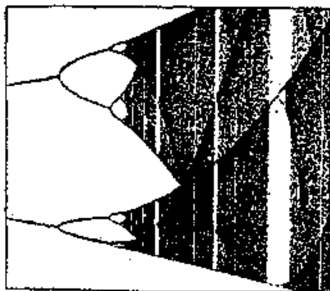


图6-5　逐级分叉

## §6.4　曼德布罗特集

热情的赞赏者常常说：曼德布罗特集是最复杂的数学对象，即使用无限的时间也不足以观察它的全貌。那饰以多姿荆棘的圆盘，那弯曲缠绕的螺线和细丝，那挂着微细颗粒的鳞茎，那无穷尽的斑驳的色彩，那好象是上帝葡萄藤上的累累果实。曼德布罗特集显示了分形之美。如果想要对各种图形，用数字描述这个集合的轮廓，大概需要无穷多信息。但出于人们的意料之外，只需一般简练的计算机程序就包含了足够的信息来再现全部集合。

曼德布罗特集变成分形、混沌的一种国际标志，出现在国际会议的文集上和工程刊物的华丽封面上，成为世界上巡回展览的计算机艺术品的中心。人们容易从这些图形中感受到它的美丽；但了解它的数学意义要难得多，然而数学家们

开始逐渐理解它。

曼德布罗特在计算中，思想上十分活跃，他想得很多，似乎看到一种形状的阶梯，有更多的形状隐约欲出，在计算机的屏幕之外似乎翱翔着无穷尽的异常的图形。于是他把粗糙的原始图形精细化，很快发现，有些东西乱糟糟地粘在圆盘的边缘，也飘浮在附近空间。当他越来越细致地计算时，他突然感到好运完结了。图形变得更加不清楚，更加杂乱了。他采用哈佛大学更高性能的计算机，他惊喜地看到，那些越来越多的杂乱实际上是某种真实事物的迹象。嫩芽和卷须从主岛慢慢地生长起来，一条形似光滑的边界分解成一串螺线，又酷似海马长长的尾巴，螺旋卷曲，伴随着它的是汹涌澎湃的大海波涛，在兰色衬托下，又象天空云彩，滚滚向前直至无穷。如图6-6是曼德布罗特集局部，每一个方向约放大100万倍。

曼德布罗特集的计算是简单的，只要对映射

$$Z \rightarrow Z^2 + C \qquad (6\text{-}11)$$

进行迭代。取一个数，乘上自己，再加上初值，如此不断迭代运算。

从那些飘浮的微细颗粒的发现，人们自然要提出一个问题：曼德布罗特集是否连通，即整片大陆与伸得很远的半岛是否相连？也许是在主体大陆之外包围着不同尺度的小岛？这并非是显而易见的。当曼德布罗特考察他的图像时，敏锐地注意到主体附近飞翔的许多斑点。某些斑点消失了，但另一些却长成几乎是原件的复制品。他们似乎是独立的，但也可能是相连的，只是连线极细而已。参见图6-7。

数学家多阿第（A Douady)和哈伯德(J Hubbard)

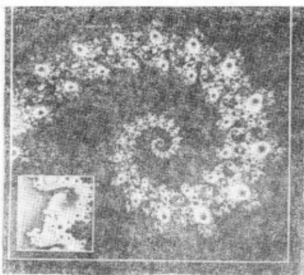


图6-6　曼德布罗特集局部

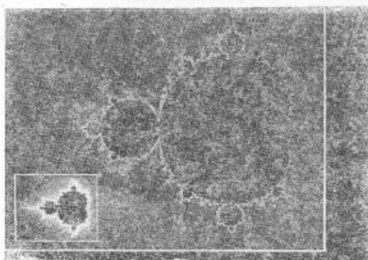


图6-7　曼德布罗特集大视野

证明，任何一个片断，无论在哪里，无论有多小，当它被计算机放大后，都会揭示出新的微细颗粒，每一粒都象是原来的主集合，但又不尽相同。每一个新的微细颗粒都被自己的螺线和火焰似的投影包围着，而它们又不可避免地揭示出更细小的颗粒，总是相象而又不完全相同，满足着某种无穷多变的指令。这是一种微型化的奇迹，其中每一个新的细节都必然自成一个新宇宙，既分散，又完整。

## §6.5 分形整体构造

你思考过大自然本身的形象吗？这是一个有趣而深刻的问题。巴恩斯利（M Barnsley）曾多次推敲，终于把随机性作为模拟自然形象的一种新技术的基础，并称这种新技术为借助迭代函数系统的分形整体构造。而口头上，他称之为混沌游戏。

进行混沌游戏只需一台计算机和一个随机数学发生器。但更简易的办法是一张白纸和一枚硬币。在纸上任意选取一个点为中心点，规定两条规则：一条为正规则，一条为反规则。例如正规则为向东北方向移动2cm，反规则为向中心点移近20％。现在开始投掷硬币和确定点子，当硬币正面朝上，用正规则，当硬币反面朝上，用反规则。如果把前50点舍去不要，将会发现混沌游戏不形成由点组成的随机场，而是某种形状，随着混沌游戏的继续进行，形状的轮廓愈益分明。这是一个随机过程的极限。

混沌游戏利用一定图形的分形性质，写出作为随机迭代的一组规则。这里抓住了关于一个图形的某种整体信息，而

规则的迭代又与尺度无关地重复这一信息。图形的分形性愈强，规则就愈简单。

我们已经熟悉许多规则分形的图形，那是经无数次构造和精细化才得到的。如柯曲雪花或谢尔宾斯基垫，构造过程中需要取消一些线段，而代之以特定形状的线段。然而，混沌游戏的方法，先从模糊的模仿开始，然后图形逐步明朗。无需精细化过程，只需一组规则就体现了图形的最终形状。

对复杂的图形，规则也要复杂些，但是，如果待构造对象隐含某种分形序（自然界中多有此种隐序），则可能用很少的规则就可把它翻译出来。

巴恩斯利认为，大自然在一定意义上在玩自己的混沌游戏。他说："在一粒孢子中只有那么多信息为一种蕨类植物编

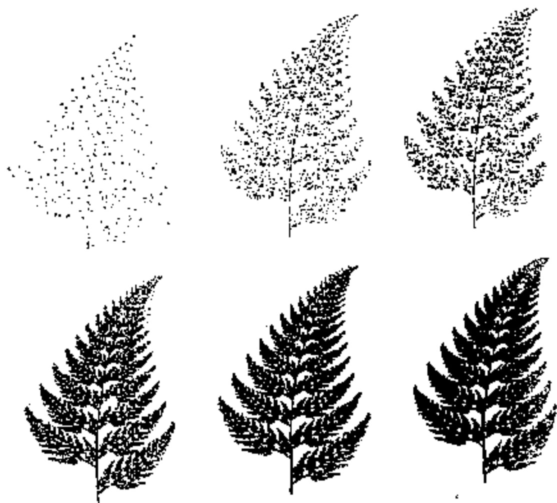


图6-8 混沌游戏

码。因此，蕨类植物能长到怎样复杂的程度是有限制的。我们能找到等价的简洁信息来描述蕨类植物，也就不足为奇了。如果不是这样，反倒是怪事了。”

图6-8是蕨类植物的计算机随机生成。然而在巴恩斯利的的技术中，随机性仅仅是工具，结果是决定性的。蕨类植物是客观存在的，我们只是用随机性方法重新发现它而已。也就是用一种随机算法去探测分形对象，给出深度信息。就象刚进入一间新屋子时，眼睛以某种完全随机的顺序瞧来瞧去，于是得到对屋子的完整印象。屋子还是它自已。对象的客观存在，与我们碰巧做什么事没有必然关系。

## §6.6 混沌与健康

生理学家们已开始视混沌为健康。在生理反馈过程中的非线性，实现调节和控制。简单说，当一个线性过程受到小的扰动时，会保持稍离原来轨道；而一个非线性过程受到同样的小的扰动时，倾向于回到初始位置。17世纪，荷兰物理学家惠更斯曾偶然遇到一个调节过程的例子。有一天惠更斯注意到一组靠墙放置的摆钟恰巧以完美的同步合唱方式摆动。他知道这些钟不会都那么准确，而且当时有关摆的数学描述，还未能解释有序会从一个摆神秘地传到下一个摆。惠更斯猜测，这些钟的同步摆动，是被通过木头传递的振动协调起来的。一个振动周期锁在另一个振动周期上的现象，现在称为锁频或锁模。在电子学里，一个无线电接收机可以锁定在某些信号上。在生物学中，锁频组成振子，使得像心脏细胞和神经细胞这样的生物振子能够同步工作。锁频可以解

释月亮为什么总面向地球。我们再举自然界中的一个实例，东南亚的一种萤火虫在交尾期会成千上万只聚集在树上，以奇妙的和谐同时闪光，情景奇异而壮观！

所有这些调节、控制现象，反映系统抵抗小扰动冲击的本领之高低。对生物系统，灵活性是极为重要的问题，它反映生物系统在某一频率范围内发挥作用的本领如何。生物体必须适应迅速而不可预见地变化的环境；人类的心搏和呼吸节律不可能锁在最简单的物理模型的严格周期性上，身体的其他部分的更细微的节律更是如此。因此，生理学家们建议，健康动力学应转向分形论。肺里的支气管的分支网络和心脏里的传导纤维，允许有变化范围很宽的节律。哈佛医学院的戈德伯格（A L Goldberger）说："与多尺度、宽频带相联系的分形过程是富信息的。相反，周期状态反映很窄的频带，由单调的重复序列定义，是缺乏信息内容的。"这导致对系统失调治疗的新途径。图6-9是人的脑电信号图，其中图6-9(*a*)是正常人的脑电图，显示高度不规则特性；图6-9(*b*)是癫痫病人的脑电图，是发病时记录的电信号，我们看到其明显的周期特点。

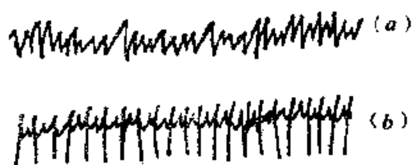



图6-9 脑电图

(*a*) 正常人 (*b*) 癫痫人

生理学家称系统失调、系统协调或控制的破坏为动力学疾病。这类综合症包括呼吸失调，如气哮、气喘、婴儿窒息

（与婴儿猝死综合症有关）等；血液失调，如白血病、血小板和淋巴的平衡；精神分裂症和抑郁症。生理学家建议：对这类失调症的治疗，可能要依靠扩展系统的频谱储备，使系统能跨越许多不同的频率而不被锁定于某周期频道。

生命的结构单元DNA是一种非周期晶体，换句话说，不规则性是构成生命的基础，因此说，混沌是健康。

## §6.7 从涨落到有序

按传统的观点，无论是微观层次或宏观层次，在许多情形中，涨落只是小的校正。例如，在体积为$V$的容器中有由$N$个分子组成的气体。把这个容器分为体积相等的两部分$V_1$和$V_2$。问其中$V_1$（或$V_2$）部分内的粒子数$x$是多少？这里$x$是个随机变量。

根据概率论中的大数定律，给出由涨落引起的误差估计。大数定律指出，如果测量$x$，其期望的数量级为

$$x=\frac{N}{2}\pm\sqrt{\frac{N}{2}} \quad (6\text{-}12)$$

假定$N$是很大的数，则由涨落$\sqrt{N/2}$引入的差值也可能很大。例如$N=10^{24}$，则$\sqrt{N}=10^{12}$；但是涨落引入的相对误差为

$$E=\frac{\sqrt{N/2}}{N/2}\approx\frac{1}{\sqrt{N}} \quad (6\text{-}13)$$

显然，当$N$足够大时，上式趋于0。由此可知，只要$N$足够大，则涨落是可以忽略的。

这是系统处于平衡态的情形。但在非平衡态过程，将发

现恰恰相反的情况，涨落决定着系统的全局结果。此时，涨落并非是平均值中的校正值，而是起着改变均值的非同小可的角色。

当系统走向非平衡时，系统内部发生剧烈变化，在接近分叉点时，涨落变得异常大，大数定律被违背了。在这奇异的时刻，系统可能在不同状态之间作出抉择。涨落甚至可能达到与平均值同数量级的水平。涨落与均值的区别被打破了。正如本纳德实验中，宏观距离的粒子之间有了密切的联系，水分子在长程关联作用下，组织起来，形成奇妙的水花。局域的事件在整个系统中得到反响。这种长程关联精确发生在从平衡态到非平衡态的过渡点上。这种过渡是突变的，是一种相变过程。不过，长程关联的幅度起初较小，随着离平衡态距离的增大而增大，在分叉点变为无穷大。在分叉点，系统通过长程关联而组织起来。所以说，非平衡是有序的源泉。

在平衡态，分子是作为独立的实体运动的，分子间互不认识，互不理睬，是“梦游者”。非平衡态把它们唤醒，此时，分子间有了联系，每个分子的行为都与整个系统有关联。所以，物质的活性与它本身可能产生的非平衡态有关。

当一个新的结构来自某种有限的扰动时，从一个状态引向另一个状态的涨落不会立即统治整个系统。它需要在一个有限的区域内建立自己的新结构，然后再进入整个空间。气体中小液滴成核是一个明显的例子。在气体中，凝结的小液滴不断形成，又不断蒸发。当气温和压力达到某一值时，液滴将变成稳定的。也就是可以定义一个临界液滴尺寸。温度越低，压力越大，液滴临界尺寸越小。当液滴尺寸超过成核

阈值时，气体几乎一下子转变为液体。图6-10是饱和蒸汽中液滴的成核。

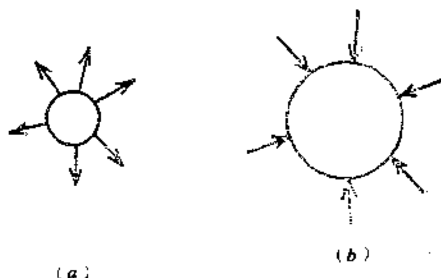


图6-10 饱和蒸汽中液滴的成核

## §6.8 混沌特征

在物质世界混沌现象处处可见，从宏观世界到微观世界概不能外。分形论试图透过貌似混乱的表面现象去寻找内部的运动规律。

一缕青烟袅袅上升，加速，加速，突然形成一个螺旋形烟圈，扩大，扩大，向四方飘散；自然界瞬息万变，晴朗的天空，突然风卷云涌，大雨倾盆；人类生活的地球，熔岩在地下奔突；野生种群无规律的繁衍和湮灭；人类心脏的纤维颤动和脑电图的无规则波动；等等。诸如此类现象，无不存在紊乱、混乱、无序状态，一言以蔽之：混沌现象（图6-11）。混沌是由系统内的非线性动力学过程产生的非周期宏观时空行为。§6.6已给出正常人脑电信号的无规则图形，这表明混沌是一种无周期的有序。混沌现象把表现的无序性与内在的规律性巧妙地融为一体。以下是混沌特征要点：

### 6.8.1 随机性

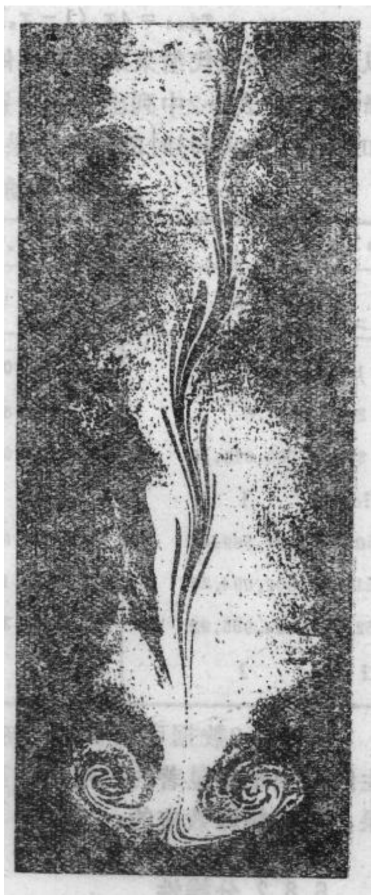


图6-11 混沌现象

体系处于混沌状态是由体系内部动力学随机性产生的不规则行为。因此，常称之为内随机性。换句话说，体系处于自发混沌。这里强调混沌现象形成的根源在体系内部，而不在体系外部。即混沌现象取决于体系内部因素，而与外部因素无关。例如化学混沌，是化学反应系统中某些组份的宏观浓度不规则地随时间变化的现象。这种浓度变化的不规则性并不是由于实验条件的不确定，或测量仪器的准确性不够造成的，而是完全由于体系内部反应动力学机制决定的。

产生混沌的体系，一般说来，具有整体稳定性，而局部是非稳定的。而体系内的局部不稳定正是内随机性的特点。也是对初值敏感性的原因所在。

让我们来考察一下简单的迭代方程：

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n) \tag{6-14}$$

以此方程的迭代结果来模拟某体系。迭代结果与初值$x_0$的选择有关。在表6-2中列出初值分别为$x_0=0.1$，$x_0=0.10000001$和$x_0=0.1000001$时的迭代结果。

表6-2　对初值的敏感性

| $n$ | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|
| | $x_0=0.1$ | $x_0=0.10000001$ | $x_0=0.1000001$ |
| 1 | 0.36 | 0.360,000,00 | 0.360,000,03 |
| 2 | 0.921,6 | 0.921,600,03 | 0.921,600,36 |
| 3 | 0.289,013,76 | 0.289,013,64 | 0.289,012,55 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 50 | 0.277,569,08 | 0.435,057,39 | 0.973,049,59 |
| 51 | 0.802,094,38 | 0.983,129,83 | 0.104,139,31 |
| 52 | 0.634,955,92 | 0.066,342,25 | 0.373,177,25 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

从表6-2数据可以看出，初值的微小变化，对迭代结果产生的影响是很显著的，洛伦兹正是根据数值计算的这一结果，提出蝴蝶效应的。

### 6.8.2 分维性

混沌具有分维性质，是指系统运动轨迹在相空间的几何形态可以用分维来描述。系统的混沌运动在相空间无穷缠绕、折迭和扭结，构成具有无穷层次的自相似结构。下一章将指出这种结构称为奇怪吸引子。

### 6.8.3 普适性

当系统趋于混沌时，所表现出来的特征具有普适意义。其特征不因具体系统的不同和系统运动方程的差异而变化。这类系统都与费根鲍姆常数相联系。这是一个重要的普适常数$\delta = 4.669201609109909\cdots\cdots$。第七章将介绍这个普适常数发现的始末。

### 6.8.4 标度律

混沌现象是一种无周期性的有序态，具有无限层次的自相似性结构，存在无标度区域。只要数值计算的精度或实验的分辨率足够高，则可以从中发现小尺度混沌的有序运动花样，所以具有标度律性质。

## §6.9 分叉实例——人口方程

在生态学中的一些非常简单的数学模型，往往具有极为复杂的动力学行为。这是1976年数学生态学家梅(R May)在英国《自然》杂志上发表的文章中得出的结论。这里从一个简单生态方程，人口方程出发，讨论一个系统如何走向混沌状态的。作为一个实例，有利于我们对这类问题的具体了解。

马尔萨斯的人口论是最著名的人口理论，可以用如下线性迭代方程描述

$$X_{n+1} = (1 + r)X_n \qquad (6\text{-}15)$$

式中$X_n$是第$n$代人口，$X_{n+1}$是第$n+1$代人口。由式(6-15)有

$$r=(X_{n+1}-X_n)/X_n \tag{6-16}$$

为人口增长率。利用

$$e^r=1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots\cdots$$

只取一次项，而略去二次项以上的各项，则式（6-15）可改写为

$$X_{n+1}=e^rX_n \tag{6-17}$$

若令$X_0$为零代人口数，则第一代人口，第二代人口，以至第$n$代人口就分别为

$$X_1=e^rX_0,\ X_2=e^{2r}X_0,\cdots,\ X_n=e^{nr}X_0 \tag{6-18}$$

可见人口数按指数规律增长。为了使问题更具普遍性，适用生态学的其它方面，可以一般地讨论生物种群。显然，这个模型过于简化，没有考虑到种群数量受到环境条件，如食物来源、竞争者等等因素的限制。我们按指数规律来估计一下人口增长的情况，计算表明，到2635年世界人口将达到$1.8\times10^{15}$。地球总表面积（陆地和海洋之和）为$5.1\times10^{14}\text{m}^2$，所以到那时平均每个人只能占有约$0.3\text{m}^2$。从这个结果看来，人口增长太快了，应进行修正。下面给出维赫斯特的修正方案，即在式（6-15）的右方加一个修正项：

$$X_{n+1}=(1+r)X_n-bX_n^2 \tag{6-19}$$

令

$$\mu=1+r \tag{6-20}$$

则

$$X_{n+1}=\mu X_n-bX_n^2 \tag{6-21}$$

式中修正项$bX_n^2$反应了环境限制因素，这里考虑了非线性项。我们曾在第一章就对非线性项在某些系统中的作用问题

作过讨论。当人口较少时，非线性项影响小，可以忽略，于是式（6-19）又回到马尔萨斯人口论模型。

作变量代换，改变式（6-21）的形式，令$x=bX/\mu$，则有

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)=f(x_n,\mu) \qquad (6\text{-}22)$$

显然，式（6-22）与式（6-14）具有同样的形式。方程的迭代结果与初值$x_0$有敏感的依赖关系；我们还将看到结果对参数$\mu$也有敏感的依赖关系。

现在对方程式（6-22）作具体讨论。

对于人口来说，数值不得为负，若$x_n<0$，或$x_n>1$则$x_{n+1}<0$，无意义。所以，要使方程式（6-22）有意义，$x_n$的取值范围为$0<x_n<1$。在此数值范围内，$x_{n+1}$的极大值出现在$x_n=1/2$处，相应地$x_{n+1}=\mu/4$。由此可知，要使$X_{n+1}$不大于1，则要求$\mu<4$；对人口的正增长率($r>0$)，要$\mu>1$。所以参数$\mu$的取值范围为$1<\mu<4$。

这里用简捷的图解方法来讨论，每次都从45度线，即$X_{n+1}=X_n$的直线开始考察方程的行为。图6-12($a$)是按马尔萨斯人口模型，每年以一定百分率稳定无限增长。而更现实的函数形式应是一段拱型曲线，即考虑到非线性项，因而成为抛物线形曲线，人口数目太大时增长率要降下来。抛物线的陡度取决于$\mu$值。

迭代方程（6-22）的行为敏感地依赖于抛物线的陡度，即依赖于非线性程度，梅称之为盛衰度。太平缓的函数会导致种群的毁灭，任何初始种群数最终都要归于零，如图6-12（$b$）所示，此图$\mu=0.8$。

当$\mu=2.5$时，从图6-12($c$)可看出，每给定一个初值

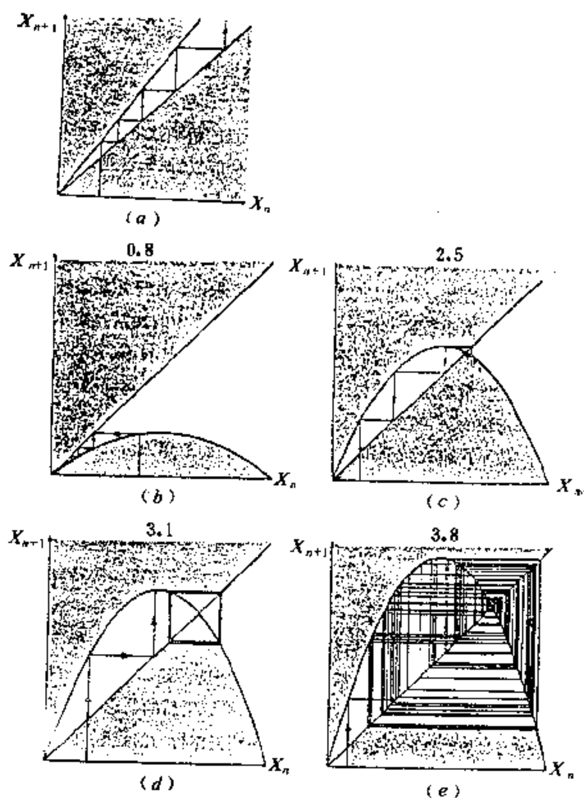



图6-12　迭代方程行为

$x_0$，迭代方程就沿箭头所示的路径行进，最后终止在 $x_{n+1}=x_n$线，即斜率为45度的直线与$x_{n+1}=f(\mu=2.5, x_n)$曲线相交处。这就是迭代方程（6-22）的不动点，容易得到不动点处$x^*=1-1/\mu$。

当$\mu>3$时，出现不稳定，如$\mu=3.1$时，从图6-12(d)可

以看出，此时出现不稳定，产生一对稳定的不动点，$x_1^*$和$x_2^*$，即形成倍周期2的振动。

$$x_1^*=3.1x_1^*(1-x_1^*),\quad x_2^*=3.1x_2^*(1-x_2^*) \qquad (6\text{-}23)$$

对于某生物种群，若今年春天的种群数是$x_1^*$，则明年春天为$x_2^*$，后年又是$x_1^*$，如此周而往复，不停息地来回振荡，为式（6-22）的行为特点，即周期2特点，有两个不稳定点。当$\mu$进一步增大时，两点周期振荡也失稳，各自产生一对新的不动点，形成稳定的四点周期振荡。就这样，随着参数$\mu$的增大，出现周期2，周期4，周期8，周期16……等的振荡。即形成周期为

$$T=2^n \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (6\text{-}24)$$

的振荡，称这种现象为倍周期分叉。

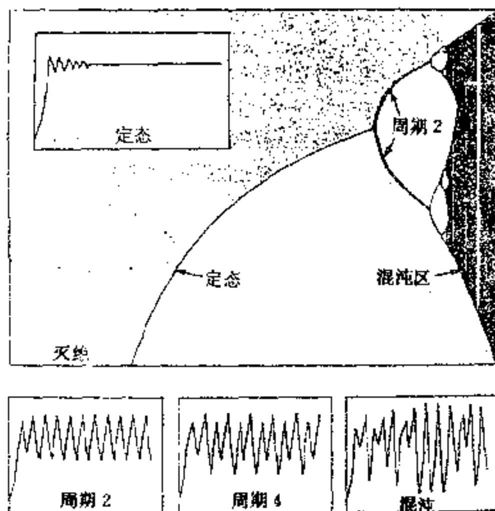



图6-13　倍周期分叉的示意图

当$\mu = 3.5699\cdots$时，倍周期分叉现象突然中断，体系进入混沌区域，图6-12($e$)是$\mu = 3.8$时，出现无限长周期振荡。

图6-13为倍周期分叉的示意图。

通过上述讨论，我们看到，适当调整控制参数$\mu$是十分重要的。而迭代方程对初值的敏感性，可以说是对我国哲学思想中“差之毫厘，失之千里”的定量表达。在这里我们看到了古今中外哲学思想的汇合点。

# 第七章　奇异吸引子

奇异吸引子常隐藏在混沌现象的背后，是一类具有无限嵌套层次的自相似分形几何结构。我国古代对宇宙形成的看法中有“混沌初开”之说，对混沌的描述是：“混沌相连，视之不见，听之不闻。”哈肯指出：“混沌性来源于决定性方程的无规运动。”伴随着混沌现象的出现，人们发现奇异吸引子的诞生。

一个耗散系统，由于耗散因素的作用，随着时间的推移，相体积不断收缩。所以，耗散是一种整体性的稳定因素，它使运动轨道稳定地收缩到吸引子上。如果在相体积收缩的同时，沿某一方向的运动出现局部不稳定，就会使运动轨迹无穷折迭，扭曲和拉伸，而产生奇异吸引子。所以，奇异吸引子是整体稳定和局部不稳定共同作用的产物。

本章从远离平衡态和湍流开始，广泛介绍各种奇异吸引子，最后介绍一个新的普适常数的发现，从而导致对宇宙的新认识。

## §7.1　远离平衡态

### 7.1.1　自组织现象

处于不同状态的系统，可以分为平衡态系统，近平衡态

系统和远离平衡态系统三大类。这在§1.3中已论及。这里只着重讨论远离平衡态系统。

想象一个原始部落。若其出生率和死亡率相等，则人口的数量保持稳定。假定食物和其他资源都充足，这个部落就成为处于生态平衡的系统。

后来，人口的出生率稍有增加，少量多于死亡人数的出生者，对系统可能只有小的影响。此时，部落变为近平衡态系统，没有大的变化。

可是，如果在多少年后，出生率突然猛增，系统就被推入一个远离平衡态的情形。这时系统中占统治地位的是一些非线性关系。在这种情形下，系统与以往完全两样了，产生了大的变化，系统对外部的影响特别敏感，小的扰动，可能产生巨大的效果。整个系统可能以异乎寻常的方式重新组织起来。

在本纳德实验中，处于平行玻璃板间的水，在某临界值时，突然转变成一种有序的对流水花，从整体上重新组织液体，成千上万水分子像是听从指挥或接受暗示似的突然自我组织在美丽的水花结构中。

在远离平衡态的情形下，根据具体系统，会发生自发的，富于戏剧性的，在时间和空间上的物质自组织过程。

### 7.1.2 有序性原理的否定

玻尔兹曼的有序性原理，把系统的熵$S$和系统所处状态的概率$P$联系起来。

$$S = K_B \ln P \tag{7-1}$$

这里$K_B$是玻尔兹曼常数。

在本纳德实验中，只要水分子处于无序，即速度有一个很宽的分布，则概率$P$很大。但是，当相干运动出现时，大量水分子以几乎同样的速度运动。对这样的运动状态，速度的分散性很小，所以概率$P$将很小。也就是说，几乎不可能发生自组织现象，然而事实上却发生了！我们看到，对$P$的计算在这里受到否定。本纳德不稳定性是一种涨落状态，是对流现象。按玻尔兹曼的有序性原理，它将逐渐衰退下去；事实恰恰相反，涨落被放大了，直至扩展到整个系统。当温度梯度超过临界值时，一种无法预料的分子秩序自发地产生了。这相当于系统通过与外部世界交换能量而达到稳定的巨大涨落。

### 7.1.3 生命起源

在远离平衡态条件下，作为玻尔兹曼有序性原理基础的概率概念不再成立。我们观察到的结构不再与概率的最大值相对应，也不与自由能$F$的最小值相对应。

$$F = U - TS \tag{7-2}$$

式中$U$为系统的内能。所以系统趋于均匀性和忘却初始条件的倾向不再是一般性质了。由此，我们说，有关生命起源的古老问题的讨论将是另一情景了。可以指出，生命起源与玻尔兹曼的有序性原理是不相容的，而与远离平衡态条件下出现的状态并非是不相容的。

### 7.1.4 平衡结构与耗散结构

在固体物理中，晶体是其研究的主要对象，也是固体物理学借以建立理论体系的基础。晶体，是典型的“平衡结

构”。但像本纳德水花结构却具有完全不同的性质。这里是一个典型的“耗散结构”。具有此结构的系统，以对称破缺、多重选择和长程关联为特征。在这种情形中，既存在有序，又存在耗散。在经典热力学中，热的传输被认为是浪费的源泉；在本纳德实验中，热的传输成为自发组织和有序的源泉。

一个系统与外部世界相互作用，嵌入非平衡态之中，可能成为形成物质的新动力学态——耗散结构的起点。耗散结构实际上相当于超分子组织形式。晶体结构的参数可从组成它的分子的物理、化学和几何约束中导出；而耗散结构是系统全局性非平衡状态的反映。描述系统的参数是宏观的，如厘米数量级，不象晶体结构的空间结构距离是以分子间的距离$10^{-8}$cm的数量级。时间的尺度也不同，不是和分子的时间相对应，如某些分子的振荡周期为$10^{-15}$秒，耗散结构和宏观的时间相对应，如分、秒数量级。

### 7.1.5 广阔的领域

物质在远离平衡下条件下，将获得新的基本属性。一个有趣的例子是外部场，如引力场，可以被系统所“觉察”。我们每个人都受到地球引力场的作用，但我们并没有觉察到引力的存在。因为所涉及的是势能与热能之比，就地球引力而言，是一个小量。我们必须爬上高山，或乘坐飞机才能感到大气组成或大气压力的明显变化。回顾本纳德实验，从力学的角度看，其不稳定性的原因是由于热膨胀提高了系统的重心。换句话说，引力在这里起主要作用，并导致一种新结构的出现。这里系统只有几毫米厚，当处于平衡态时，在如此薄的水层内引力的变化是可以忽略的。但是由于在薄层中

存在温度梯度，温差引起非平衡态。于是奇迹出现了，引力的宏观效果甚至在这薄层中变成可觉察的了。可见非平衡态扩大了引力效果。远离平衡态的情形，不仅存在于自然科学领域，在社会科学和哲学科学领域也存在。我们不妨去分析社会的、经济的、技术的和政治的现实，例如革命、经济崩溃、技术革命和范式更迭等。我们会发现涨落、分叉、反馈、自组织和耗散结构等，是有用的概念，会帮助我们去分析、认识面临的现实问题。

## §7.2 湍　　流

山涧急流而下，在急流下面的石缝里突然冒出一个转动的涡流，它增大，分裂，旋转着顺流而下；一缕青烟从烟灰缸中缓缓升起，加速，再加速，直到超过临界速度而分裂成杂乱的涡流。湍流可以在实验室里观察和测量，在风洞中可以对任何新的机翼或螺旋桨用实验方法检测出来，但其本质却难以理解。对湍流的传统认识一直是特殊的而不是普适的。就波音747机翼所做的试错实验结果，对F-16战斗机机翼的试错实验并无借鉴。面对这类不规则的流体运动，超级计算机也几乎无能为力。总之，当流体的流动是平滑的（称为层流），小的扰动会逐渐消失。但若越过某临界值之后，扰动会灾难性地增大。这种转变，至今仍是未解之谜。

### 7.2.1 上帝未必能回答的问题

伟大的物理学家们都正式或非正式思考过湍流问题，这是一个有着悠久历史的难题。平滑的流体破裂成螺旋和涡

流。流体与固体的分界凌乱而不规则。能量极快地从大尺度运动传输给小尺度运动。这是为什么？物理学家看来几乎是不可知的。传说，量子物理学家海森堡临终时说，他要带两个问题去见上帝：相对论和湍流。他说："我真的相信他对第一个问题会有答案"。言下之意上帝未必能对第二个问题作出确定的回答。

理论物理学家认为，对流体的有规则运动还有许多事要做。在有规则的层流运动中，并不是每个分子都可能独立地运动。相反地，原来相邻的分子始终相邻，就像每一个分子都是一匹套上辄的战马，听从指挥步调一致地向前迈进。

在某些工程问题中，总是设法使湍流消失。而在另外一些工程问题中湍流却受到欢迎。例如在喷气发动机中，气体与汽油混合得越快，燃烧越有效。但许多情况下，湍流带来灾难。机翼上的空气湍流消灭浮力；输油管中的湍流造成大的阻力，大大减少油的流速，影响输油管输运效率。人们还考虑心血管中血液的流动；爆炸的形状和演变；火焰和冲击波等一系列与湍流有关的问题。

### 7.2.2 湍流究竟是什么？

湍流究竟是什么呢？湍流是各种尺度上的无序系统。系统中大涡流套着小涡流。它是不稳定的，高度耗散的。湍流耗费能量，形成阻力。湍流是一种随机运动。假定有一条完全光滑的管道，一个完全稳定的水源，完全与振动隔离。那么，这样的流动怎么会产生随机的成份呢？

把流体摇动一下，即激励一下。流体有粘滞性，因而激励的能量被消耗掉，如果停止摇动，流体会自然趋于平静。

当摇动时，产生低频长波，而长波会分解成短波。产生的涡流包含有小涡流，每个涡流都要消耗流体的能量，都产生特有的节奏，即不同波长的波。

庞加莱（J H Poincare）发现，在河流表面，涡流总是与平滑流动的区域混在一起。涡漩是区域化的，所以能量实际上只在一部分空间中耗散。只要仔细观察湍急的湍流，在每一个尺度上都有新的平静区存在。从这些观察中产生流体的间歇性模型。涡流区与平滑区从大到小的各种尺度上交错混合在一起。稍为理想化的间歇图像是高度分形的。

### 7.2.3 湍流形象

我们要问，流体是怎样越过层流到湍流的分野？在湍流形成之前，是否存在中间阶段？这里介绍理论物理学家朗道，（L D Landau）的理论。他认为，湍流是许许多多相互竞争的节奏堆聚在一起。当更多的能量输运入系统时，每次产生一个新的频率，每一个新产生的频率与既有的频率都不相容。就好像强拉小提琴的弦使之产生一个个非谐音振动，第一个，第二个，第三个……等，直至形成一片无法忍受的噪音。

设想任何液体和气体都是无穷多粒子的集合体，若每个粒子都独立运动，流体就会有无穷多种可能的运动，即有无穷多个自由度，描述相应的运动方程包含无穷多个变量。但实际上每个粒子并不完全是独立运动，它们在一定程度上依赖邻近粒子的运动，因此在平滑流动中自由度数目降低了。运动的初期，邻近的流体或保持邻近，或以线性、光滑的方式相互漂离，所以就产生风洞照片中的流畅线条；香烟烟柱中的上升粒子，在开始时刻也保持大致相一致的速度。

然而，此后出现了紊乱，出现了狂野运动，这类剧变运动常被称为振荡、脉动、飘摇、摇摆、扭动、曲折等。按照朗道的观点，这些不稳定的新运动简单地累积起来，一个叠加在另一个之上，造成速度和尺寸都相互交叠的新节奏。

再想象一个例子。水在管道中流动，发出微弱平稳的嘶嘶声。假定增加水压力，一种前后振动节律开始出现。像波一样，慢慢地敲着管壁。再增大压力，从什么地方冒出第二个频率，与前者不同步。两种频率相交叠，相竞争，相冲突。相互干扰的波动冲击着管壁，所形成的运动已相当复杂。现在再加大压力，便出现第三个频率，然后第四个频率、第五个频率等等，全都互不相适应。流体的运动变得极其复杂，这就是湍流。

在很长一段时间，湍流被视为与无序或噪声等同。事实上，湍流运动在宏观上看是无规则的或混沌的，但在微观上看则是高度有组织的。湍流中所涉及的多重空间和时间尺度对应着亿万分子的相干行为。所以，流体从层流到湍流的过渡是自组织过程。在层流中属于分子热运动的那部分能量逐渐被传递给宏观的有组织运动。

## §7.3 奇异吸引子

### 7.3.1 奇异吸引子的提出

为了说明奇异吸引子是怎样提出来的，我们简要介绍一下茹厄勒(D Ruelle)。他于1935年出生在比利时根特，是一位体育教师和一位大学语言教授的儿子。他虽然从事抽象科

学方面的研究，但也喜爱自然界的危险方面，喜欢自然界中出人意料的事物。他在探索混沌中作过持续的贡献。1970年，他加入巴黎的高等科学研究所。他经常离开研究所和家庭，只带一个背包到冰岛空旷的原野或墨西哥农村去独自散步，常常一个人也见不到。当他偶然遇到人，并接受款待时（可能是一餐玉米饼，没有油、肉和蔬菜），他会联想到2000年前世界曾经如何存在。但只要一回到研究所，他又投入自己的科学生活之中。

1971年他和荷兰数学家塔肯斯(F Takens)合写了一篇论文“论湍流的本质”，有意与朗道的“论湍流问题”相呼应。他们想取代关于湍流发生的传统观点，提出，只要三个独立的运动就可以产生湍流的全部复杂性，而不是产生大量不同的频率，形成无穷多独立的交叠运动。至今他们的观点并未得到承认。但论文中提出“奇异吸引子”的概念是很有引诱力的。由于它在混沌研究中的重要地位，使得他和塔肯斯之间就谁首先使用这个词语而有礼貌地争执过。实际上是两人都不太记得了。塔肯斯说：“我什么也不记得了。我常常创造而不去记住它。”茹厄勒说：“塔肯斯恰好在所里访问。不同的人有不同的工作方式。有些人努力要完全由自己写出一篇论文来，这样他们就占有了全部荣誉。”

在物理学中我们已经同两类简单的吸引子有过接触。即不动点和极限环。不动点表示系统的轨道达到定态；极限环表示系统的轨道不断自我重复的行为。

### 7.3.2 简单吸引子

在几何学中我们采用笛卡尔坐标，横坐标代表一个变

量，纵坐标代表另一变量。假定这个系统是无摩擦的摆动着的单摆。那么一个变量是位置，另一个变量是速度，它们连续变化着形成一条点线，最终变为一个闭环。由于不存在摩擦力，所以在相空间单摆的运动轨道一遍又一遍重复不止。随着向系统提供的能量大小，闭环将有大有小，这就是无摩擦单摆运动轨道的吸引子，称为极限环。图7-1是无摩擦单摆运动轨道形成过程。这是一个稳定轨道，即使有小的扰动，系统仍回到这个轨道。在相空间一切靠近这条轨道的运动都将趋向于它。这正是吸引子所具有的特征。

当考虑到摩擦存在时，摆运动的图像将发生变化。由于

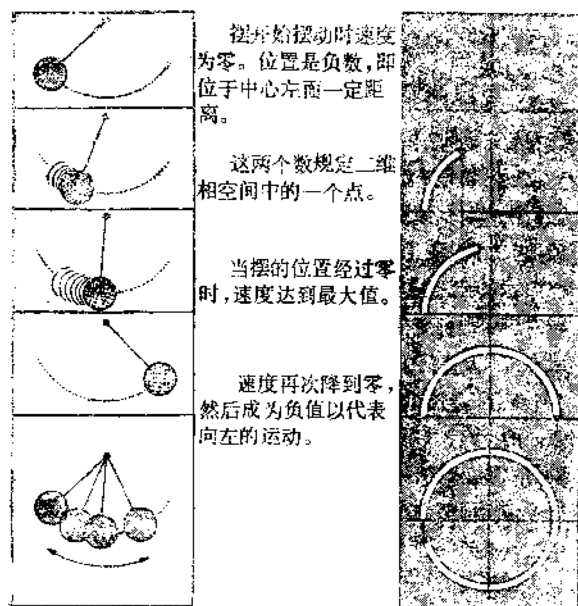



图7-1　无摩擦单摆运动轨道

摩擦力使摆慢慢地最终停在一个定点，即中心点，此处位置坐标为0，速度为0（图7-2），中心不动点"吸引"着摆的运动轨道。在相空间的轨道不是永远转圈子，而是循着螺旋轨道被吸引向中心不动点。摩擦消耗系统的能量，从高能量的外区被引向低能量的内区，最终趋于吸引中心。可见当时间$t \longrightarrow \infty$时，系统趋于一个与时间无关的定态，即系统趋于相空间中一个特定的点，这就是不动点。不动点是零维吸引子，如图7-2所示。如果当时间$t \longrightarrow \infty$时，系统只作周期振荡，这就是一维吸引子，即极限环，如图7-1所示。一般的情况是有两套流线同时存在，中心点附近流线向外，而远处流线向内，两种流向统一起来的一种可能性是在中间出现一条封闭的曲线，成为两套流线的共同极限，这就是极限环，如图 7-3 所示，其中($a$)是 2维极限环，($b$)是 3 维极限环。这类吸引子的维数

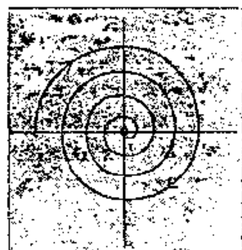
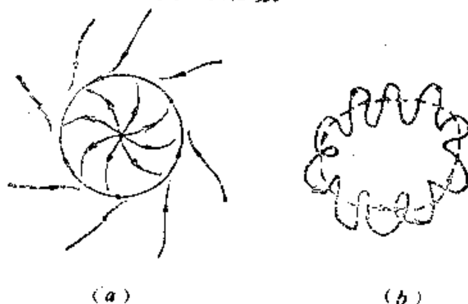


图7-2 零维吸引子



（$a$）　　（$b$）

图7-3 极限环

（$a$）2维；（$b$）3维

是整数，称为简单吸引子或平庸吸引子。

### 7.3.3 茹厄勒的怀疑

茹厄勒怀疑在湍流中所见到的那些自相缠绕的流线，螺线形的漩涡，在眼前出现而又消失的螺旋，必定反映了只有用至今尚未发现的定律才能作出解释。他认为湍流中能量的消耗必然要导致相空间的收缩，从而向吸引子收敛。显然，这个吸引子不会是不动点，因为流动永远静止不了。能量一方面注入系统中，一方面消耗掉。那么可能是什么样的吸引子呢?是否如上文的分析，只可能是周期吸引子(极限环)?是一条吸引附近所有其他轨道的轨道?

不是!湍流永远不产生排除其它节律的单一节律。湍流的显著特性是各种频率的振荡同时存在。湍流就像白噪声，或静电干扰。所以人们关心是否存在其它类型的吸引子，具有一系列性质:

1° 稳定性，表示在有噪声的世界中动力学系统的最终状态。

2° 低维性，相空间中一条低维(非整数，即分维)轨道。

3° 非周期性，运动轨迹永远不自我重复。

4° 初始条件敏感性，有差之毫厘，失之千里的实际情况。

在几何上这是一个难题，在有限的相空间中形成一条轨道，它既不自我重复，又不自我交叠，还要产生一切节律，那么这条轨道必须是有限体积中的无限长的线。换句话说，这是一个奇异吸引子，它必定具有分形性质。

### 7.3.4 第一个奇异吸引子

实际上，1963年洛伦兹在论文“决定性的非周期流”中给出一条十分复杂、美妙绝伦的曲线。曲线分为左右两翼，右翼只有2条曲线，左翼有5条曲线。论文和曲线已被成千上万篇论文所引用，认为那条神秘的曲线可能包含一些永恒的秘密。后来被称为洛伦兹吸引子。洛伦兹首次发表的7个环形的曲线，计算机要作500次相继的计算，在相空间中沿着这条轨道运动的一个点，可以演示洛伦兹对流模型中流体缓慢的混沌转动。由于系统包含三个独立变量，这个吸引子存在于3维相空间中。洛伦兹只画了一小部分，然而他看到的比画出来的要多：这是一条双螺旋曲线，好像以绝顶灵巧的方式交织起来的一对蝴蝶翅膀（图7-4）。当系统中上升的热量把流体推向一个转动方向时，轨道处于右翼；当滚动停止后反向运动时，轨道就摆动到左翼。

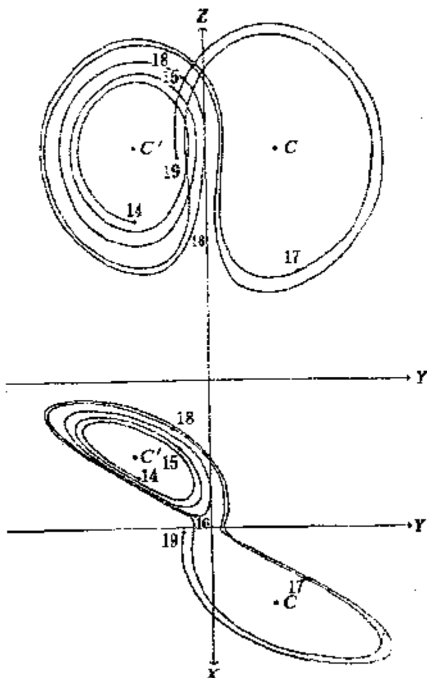



图7-4 第一个奇异吸引子

这个奇异吸引子是稳定的，低维的和非周期的。轨道永远不自己相交，因为一旦自交就回到过去的一点，此后的运动就会按周期环重复。吸引子中的环和螺线有无穷深度，永不真正靠近，永不自交。永不自交，正是洛伦兹吸引子的无限美妙之所在。《纽约时报》技术部主任格莱克(J Gleick)说，混沌的全部丰富内容尽在其中。

洛伦兹吸引子有着不同的图像。下面是他提出的方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial x}{\partial t} = -\sigma(x-y) \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial t} = rx - y - xz \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial t} = xy - bz
\end{cases}
\tag{7-3}
$$

式中$\sigma$，$r$和$b$是参数。当取不同的参数值时，经迭代运算会得到形态各异的奇异吸引子。图7-5是第一个奇异吸引子的全貌。

洛伦兹吸引子具有两片球对称的特点。罗斯勒（O E Rössler）用两种完全不同的方法从洛伦兹吸引子产生更简单的，非对称的吸引性结构。一是研究洛伦兹方程组中$r$值大于28的情况；二是重新创造洛伦兹吸引子的折迭过程。他所用的方程组为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial x}{\partial t} = -y - z \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial t} = x + ay \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial t} = b + (x-c)z
\end{cases}
\tag{7-4}
$$

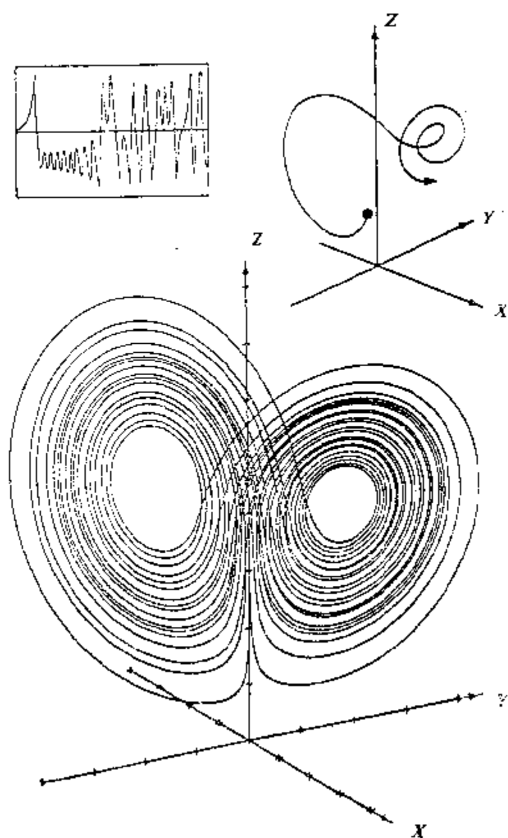



图7-5　洛伦兹吸引子

式中$a,b,c$是参数，所得到的吸引子称为罗斯勒吸引子。如图7-6所示。

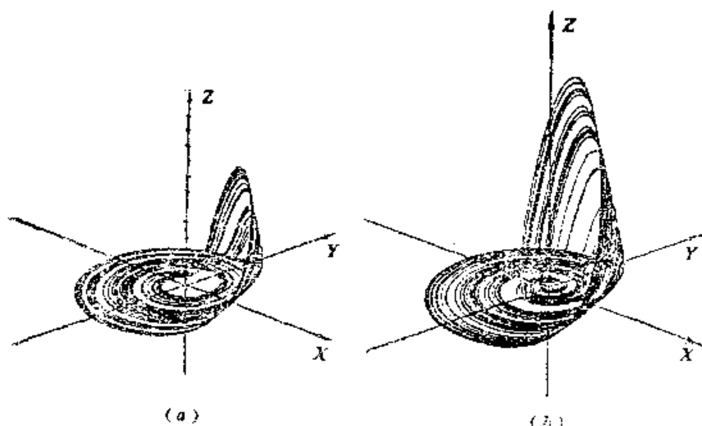



图7 6　罗斯勒吸引子

### 7.3.5　庞加莱映像

描绘奇异吸引子的图像并非易事。常常是 3 维或更多维的轨道旋转出越来越复杂的路径，甚至在空间涂出一团黑；虽具有内部结构，但是从外面看不见。为了把 3 维线团转换成平面图形，需要采用投影技术。可是复杂的吸引子在投影时细节被掩盖了。绘制庞加莱映像，实际上是从缠绕交错的吸引子中切出一个横断面。在电子技术上这是一个采样方法。即对系统的运动状态作定时采样，至于何时采样，要对系统进行分析，定出最富信息的采样间隔。图 7-7 是摆的奇异吸引子的庞加莱映像，它揭示了吸引子的结构。先是一圈（图7-7($a$)），其次是10圈（图7-7($b$)），再其次是100圈（图7-7($c$)），这样就出现混沌行为。这个摆是按规则时间间隔被推动而摆动的。当画1000圈时（图7-7($d$)），已经十

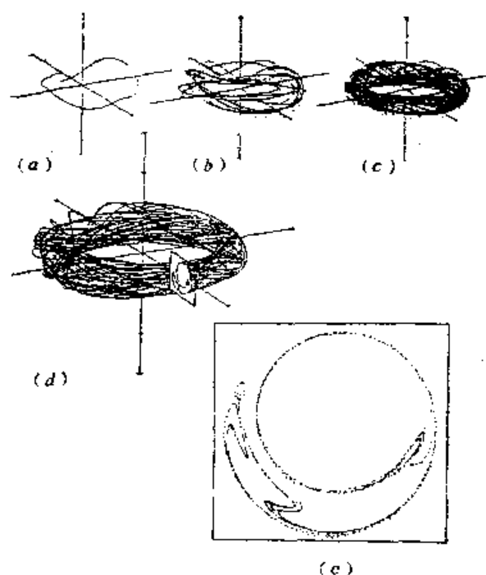



图7-7 庞加莱映像

分复杂了。为了了解吸引子的内部结构，计算机截取吸引子中的一片，即所谓庞加莱截面。这一技术把3维图像简化为2维。每次轨道穿过截面时留下一个点，逐渐地在截面上出现细节详尽的图形。图7-7(*e*)是8000多个点形成的图像，表现了奇异吸引子复杂的内部结构。

### 7.3.6 埃依奇异吸引子

埃依（M Henon）是一位天文学家，1931年出生在巴黎，他是一位与数学有缘的科学家。他研究过有成百万星星聚集在一起而形成的球状星团。这是夜空最古老的也是最激

动人心的对象。球状星团中的星体密度出奇地高。它们是如何聚到一起的?又是怎样演化的?他于1960年在巴黎写博士论文时假定：当星团改变尺寸时，它仍然保持自相似。计算结果令人惊叹不已。星团的核心将获得动能，而趋向密度为无穷大的状态，以至于塌缩。这是难以想象的，但慢慢地得到了支持，并被称为引力热塌缩。

埃侬吸引子的产生在数值上整个过程是简单的。开始时，他用一只计算器进行运算，任何一个点由$x$坐标和$y$坐标来确定其位置。他给出简单的运算规则：求某个新的$x_i$，取$y$的初始值加1，减去1.4乘$x$的初始值平方；求某一个新的$y_i$，只要$x$的初始值乘0.3。即按如下方程进行迭代

$$x_i = y + 1 - 1.4x^2, \quad y_i = 0.3x \qquad (7\text{-}5)$$

他随机地取一个初始值，按着计算器一个点一个点地算着，直到几千个点。接着他用IBM7040计算机很快地画出500万个点。最初的那些点是随机的，但很快地开始出现某种形状（图7-8），弯曲流畅的轮廓像流云，像弯月，还是像香蕉?程序运行越久，细节显示越多。图像的一部分好像具有一定厚度，但随后便分解为两条线，然后两条分为四条。其中一对靠得很近，另一对离得较远。当加以放大后，四条线中的每一条都是由双线组成。如此直至无穷，无限嵌套，层次无穷，永无了结，是一个吸引子。这不只是动力系统的一条轨道，而是其他所有轨道收敛趋向的一条轨道。

图7-8($a$)是经过10000次迭代后得到的结果。图7-8($b$)～($d$)，依次是前一图轨道上小方框中图形的放大。显然，不同放大倍数下的图形，结构上是相似的。弯月形埃侬吸引子，是由不同层次的轨道构成的。这种由不同层次轨道构成

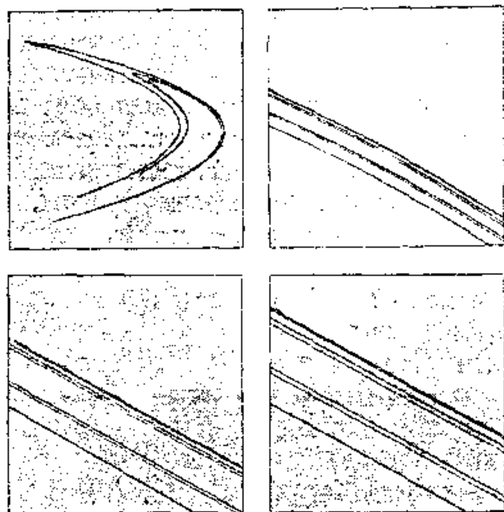


图7-8　埃侬奇异吸引子

的自相似结构的吸引子，即奇异吸引子。埃侬吸引子的分维$D_f=1.26$。

非线性系统各有千秋，自成一体，对某一系统的测量和计算似乎无助于理解另一系统。那么是否存在某种共同性质？洛伦兹吸引子对探索其他系统有裨益吗？奇异吸引子与工程问题，如喷气发动机的设计有什么关系？能得到应用吗？这都有待深入探讨。

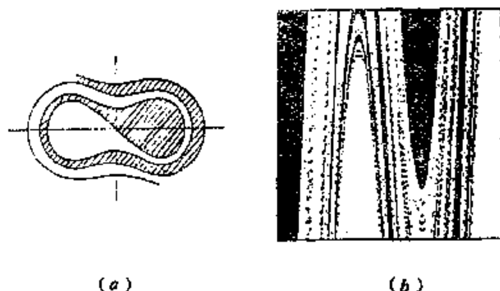
还是用茹厄勒的话来作这一节的结束语："我还没有提到奇异吸引子的美学感染力。这些曲线系统，朵朵云彩，时而像焰火或星系，时而又像奇异而不平静的植物增殖。一个形象的王国有待探索，一个和谐的天地有待发现"。

## §7.4 吸引域的分形边界

曼德布罗特集那无穷嵌套的复杂图像令人惊叹向往，而其边界美妙多姿的图案更是令人目不暇接。那些令人惊异万分的放大百万倍的图像要在大型计算机或并行的计算机上运算。当从曼德布罗特集转向那些代表实际物理现象的问题时，集合边界的性质便呈现出来了。动力系统中可能有两个或多个吸引子，每个吸引子有一个吸引域，就像河流有汇聚支流的流域一样，而每个吸引域有一个边界。在洛伦兹模型这样的系统中只有一个吸引子，当系统稳定下来只有一种行为占上风，这是一个混沌吸引子，即奇异吸引子。另一些系统可能具有非混沌的定态行为。但可能的定态不止一个。据说，研究吸引域分形边界，就是研究那些有着若干非混沌定态的系统，它们可以达到终态之一。

约克（J Yorke）曾多次演示吸引域分形边界的图片。有的图片代表强迫摆的行为，它具有两种可能的终态。这是大家所熟悉的，强迫摆的振动曾以各种面貌在日常生活中出现。约克风趣地说:"选择摆做演示，就不会有人说我是专门造了一个系统来唤大家。这是你们在自然界处处可以见到的事物。但其行为却与你们在文献中读到的完全不同。它是最乱糟糟的分形行为。"为了产生这些图片，他在1000×1000的网络方阵上进行计算，每一点代表摆的一个不同的起始位置，然后用黑色和白色表示结果。图7-9是一个强迫摆的相空间图。在摆下面放两块磁铁，摆可能停止在其中任何一个磁铁上。每个平衡态是一个吸引子，两个吸引子的边界可能是

复杂而光滑的（图7-9(*a*)），边界也可能呈现复杂而不光滑（图7-9(*b*)）。总之，系统会达到两个可能定态之一，而吸引域边界是复杂的，具有分形特点。



(*a*)　　　　(*b*)

图7-9　吸引域的分形边界

吸引域边界还涉及相变。在相变点附近，即对磁铁在居里点附近来观察其内部磁矩的排列区域，会发现磁矩取向区域的边界（相当于吸引域边界）显示出特别美丽的复杂性，带着一层比一层更为缠结的花蕾、球苞和纹路。当增加放大倍数时，图像变得越发随机，忽然出乎意料地在一个令人迷惑的区域中央深处出现了一个椭圆形，上面装饰着朵朵蓓蕾。这里出现了曼德布罗特集。

## §7.5　普适性探索

### 7.5.1　观察与思考

1974年，位于美国新墨西哥州的小城洛斯阿拉莫斯的美国国家实验室来了一位年轻的博士，人们注意到这位博士

曾夜复一夜地在街上踱步思索，他点燃的烟头在黑暗中一亮一灭，飘忽不定，甚至引起警察的担忧。小城已布满粒子加速器、气体激光器、化工厂，同时，这里也是世界上超级计算机最集中的地方之一，荟萃了数千名科学工作者。这位年青博士费根鲍姆(M J Feigenbaum)在理论部（T部)工作。100多位在T部工作的物理学家和数学家们，有良好的待遇和学术自由，他们都有光辉而且怪僻的经历。很难有什么能使他们感到惊讶。在T部工作的有像实验室主任阿格纽（H Agnew）那样的著名科学家，他曾经坐在测量飞机里，随同装有第一颗原子弹的飞机Enola Gay飞临广岛上空，摄下实验室第一件作品的投放过程。

费根鲍姆1945年出生于美国纽约，他父亲是化学师，母亲是中学教师。他最初决定要做一名电气工程师，因为这是挣钱不少的职业。1964年他大学毕业后，进了麻省理工学院，1970年获得物理学博士学位。此后四年是在康奈尔大学和弗吉尼亚工学院度过。这四年未能得到可观的成果。在国家实验室人们发现这位年青人工作时像着了魔似地干着，无法工作时，喜欢散步和思考。他认为夜里睡觉太受限制，他常常一天工作22个小时。他眼光敏锐，充满热情。他29岁时已是出类拔萃的学者。他愿意就朋友们提出的问题即兴变魔术，但好像没有兴趣把自己的研究集中到任何会得到报偿的问题上。

他思考过湍流，他揣测过时间，究竟是平滑地流逝还是像动画片那样跳跃？他思考过人眼的功能，他凝视着云彩，在飞机上透过舷窗观察或到实验室后面的高山上去观察。

滚滚的云彩弥漫天穹，形状随机奇异，有时像剑锋般挺

立，有时排成沟垄，犹如大脑纹理。在暴风雨来临的午后，天空随着闪电的即将到来而发光和颤抖，耸立在百里外的云墙渗透和反射着电光，直到整个天空开始呈现壮观的景象。云彩代表自然界的一方面，既模糊又细致，既有结构又不可预言。这方面是物理学的主流未曾涉及的，但它又是对物理学家提出的非难。费根鲍姆反复思考这类没有结果的事物，但最终导致普适性的诞生。

### 7.5.2 迭代方程的解

我们来考虑一个简单的非线性方程：

$$y=\mu(x-x^2) \qquad (7-6)$$

这个迭代方程已在式(6-22)里讨论过，这里只作简单的回顾。显然，每一个$x$值产生相应的一个$y$值，所得到的抛物线表示$x$与$y$之间的关系。费根鲍姆指出，关键是要作为反馈回路无限地重复运算。每一次运算的输出都反馈回去，作为下一次运算的输入。分析运算过程会看到存在着复杂的内涵。在$x$轴上取一个起始点，向上画一条直线与抛物线相交，在$y$轴上读出结果。然后用这个值又开始新的整个过程。这个序列先是在抛物线上跳来跳去，然后可能向一个稳定的平衡点收敛。此时$x$和$y$的值相等，稳定不变。在数值计算中，只是输出一串数字，并非总是收敛到恒定的终值。它可能在两值之间往复振荡。它也可能持续地混沌下去，不再有归宿。这些不同的可能行为的选择依赖于参数值的调整。

### 7.5.3 普适常数

费根鲍姆在收敛序列中发现一种出乎意料的规律：这些

数字是几何收敛的。像透视画中一排等同的电线杆收敛向地平线一样。知道相邻两根的大小，其余也都知道了。几何收敛的出现提示人们，某种事物在某些地方正在不同的尺度上重复。他计算了收敛比率，得到一个三位小数的数4.669。几何收敛意味着方程中有尺度变换的性质。而尺度变换意味着一切都变时有某些性质保持下来了。在混沌的表面下隐藏着某种规律性。

费根鲍姆在计算三角函数

$$x_{n+1}=\lambda\sin\pi x_n \qquad (7\text{-}7)$$

的倍周期过程中同样发现是几何收敛的，只需要为这个新方程计算一下收敛速率就成了。他得到的结果又是4.669。他意识到这个数的重要性，立即打电话告诉新泽西州的双亲，告诉他们自己碰上某种深刻的东西，因而兴奋不已。他开始计算其他函数，一切他想到的，经过一系列分叉而走向无序的函数，都产生同一个小数。他很快得到精度达到十位的小数4.6692016090。这个数称为费根鲍姆常数，记为$\delta_n$

$$\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n+1}}{\mu_{n+1}-\mu_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}$$

$$=4.66920160910209909\cdots \qquad (7\text{-}8)$$

式中$d_n$和$d_{n+1}$为分叉间距。

为什么两个形式和意义如此不同的方程导致同一结果？他发现许多结构不同的非线性迭代系统在变化过程中往往通过一串倍周期的转变走向混沌。费根鲍姆常数可以预料何时会发生倍周期。这就是费根鲍姆普适性。$\delta_n$与普朗克常数$h$，真空中的光速$C$，e和π一样也是反映宇宙本质的普适常数。

这个发现深刻地揭示了决定性系统走向混沌的规律，改变了人们对宇宙的认识。决定性系统具有内部的随机性，所以决定性系统与随机性系统之间并不存在不可逾越的鸿沟，混沌为两岸架起了桥梁。

# 第八章　多姿的分形世界

自70年代中期分形论创立以来，随着其自身的逐步成熟与发展，10多年来已被众多学科竞相引入，并显示出分形论在各学科应用中的生命力。据在哲学、数学、物理学、化学、材料科学、表面科学、电子技术、计算机科学、生物学、医学、农业、天文学、气象学、地学、城市规划学、地震学、经济学、历史学、人口学、情报学、商品学、文学、音乐、电影、美术等广泛领域应用的结果表明，分形论对各学科中的许多问题和某些难题已作出了独具特色的解释或找到了解决难题的新途径。

本章将向读者论述多姿的分形世界，限于篇幅我们将以物理、化学、材料、电子技术和表面的问题为主。希望能收到举一反三的作用。

## §8.1　凝聚现象及其模型

自然界有很多与凝聚有关的现象具有分形性质。大家知道，在云贵高原或西藏高原空气中浮悬的微粒稀少，空气清新，而工业城市则不同，空气中有许多悬浮的煤炭微粒、金属微粒和其它灰尘，这些微小的固体颗粒在无规运动中往往凝集成一个个小集团。在河流的岸边也能看到凝聚在杂草上的絮状物。实验室中，制备薄膜材料的凝聚形膜过程；非晶

态材料晶化过程出现的凝聚现象；电化学淀积中的分形凝聚等等。从自然现象到实验室中实际观察到的现象都是典型的凝聚现象。研究表明，这些过程与分形密切相关，并提出一些理论模型，为解决这类问题指明方向。

### 8.1.1 扩散限制凝聚模型

1981年美国密执安大学威特恩（A Witten）和桑德尔（M Sander）提出扩散限制凝聚（*Diffusion-Limited Aggregation*）模型，简称DLA模型。当时他们是对悬浮在大气中的煤灰、金属粉末或烟尘的扩散凝聚过程提出的模型。但模型提出后，就超越了原来的领域，受到不同领域学者的重视，而被引入不同学科。这个模型有一个凝聚中心，粒子一个一个向中心聚集，所以也称粒子-粒子（*Particle-Particle Aggregation*）模型，简称PPA模型。

模型的要点是取一个正方形点阵（$d=2$的欧氏空间），如$512\times512$，方形点阵的中心指定一个凝聚中心，并置一粒子作为种子，然后随机产生一个粒子，粒子进入方阵后随机行走，当走到与中心粒子距离为最近邻格点时，就被粘住不动，即粒子-粒子凝聚；粒子在方阵中无规行走的另一种可能是走到边界，这种情况，只要令其消失或按周期性边界条件，从另一边进入方阵继续作无规行走，这样的过程一直进行下去，直到凝聚的粒子数目成千上万，就得到如图8-1所示的凝聚集团。

从DLA模型的计算机模拟图可以看到凝聚团具有自中心向周围分叉伸展的结构，分叉的树杆比较细，其原因是随机行走的粒子运动轨迹曲折，与伸展于集团外部的分叉梢端



图8-1 DLA模型

凝聚的几率显然较大，粒子不容易侵入集团的深部，具有一种屏蔽效应，所以形成比较开放的分形结构。对2维DLA集团，$D_f=1.66$，对3维DLA集团，$D_f=2.5$。

### 8.1.2 动力学集团凝聚模型

1983年米金（P Meakin）对DLA模型作了修正，认为在DLA模型中有一个不动的凝聚中心不符合实际情况，提出令所有的粒子同时进入点阵，作随机运动。当两个粒子相遇后就凝聚成集团，集团也可以随机运动，当与粒子或其它集团相遇时，形成更大的集团。这个过程发展下去便形成分形结构。称为动力学集团凝聚模型（*Kinetic Cluster Aggregation*），也称集团-集团凝聚（*Cluster-Cluster Aggregation*）模型。常常分别简称为KCA模型或CCA模型。

自然界许多凝聚现象都与KCA模型相符合，如金属微粒的聚集体，墙角上尘絮和河口淤泥等，都是粒子的不可逆凝聚形成的。

计算机模拟结果表明，对欧氏空间维数$d=2\sim5$的情况，分维$D_f$依赖于$d$，具有比DLA模型更开放的结构和小的分维。$D_f=1.4(d=2)$，$D_f=1.8(d=3)$。其原因是这个模型集团间只要有一点相连接就形成一个整体，比单粒子更有效地屏蔽集团，互相难于侵入对方内部。日本松下贡等学者求得分维为

$$D_f=\ln(2d+1)/\ln 3 \qquad (8\text{-}1)$$

与计算机模拟相符合。

由于KCA模型的分维$D_f$实际上与粒子和集团的运动形式无关，因此，$D_f$还未能完全反映KCA模型的特征，在动态情况下，$D_f$只是凝聚集团生长形态的瞬间形状的特征量，只在一定程度上反映了生长形态的特征。松下贡等人导出了凝聚集团平均径度$\bar{R}(t)$与凝聚时间$t$之间的关系如下。

$$\bar{R}(t)=t^{1/z},\ Z=D_f-1+2D_f/d \qquad (8\text{-}2)$$

式中$Z$是动态标度指数。这一结果反映了各集团的运动状态。也就是说，用$Z$和$D_f$来共同表征KCA模型的特征。

图8-2是米金的KCA模型的计算机模拟。模拟参数是在一个$400\times400$的方形点阵上放进$N=10000$个粒子（相当于格点的粒子占有密度$\rho=0.0625$），$N=15000$个粒子（$\rho=0.09375$），$N=20000$个粒子($\rho=0.125$)，$N=25000$个粒子（$\rho=0.15625$）。

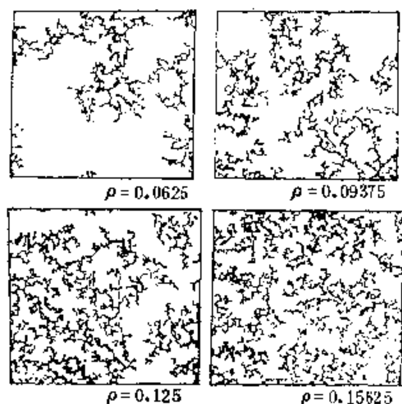



图8-2 KCA模型

### 8.1.3 分维的计算方法

这里介绍几种关于分形结构的分维计算方法。

**1. 回转半径法**

在分形结构长大的各个阶段，不断测定像元数$N$和回转半径$R$，作$\ln N \sim \ln R$曲线，若图上有相当长的直线部分，则直线的斜率就是分维值，即

$$D_f = \ln N / \ln R \tag{8-3}$$

这里$N$是图形的面积或体积，$R$是标度。

**2. Sandbox法**

在分形图形上设置方形网格，即方阵，逐步扩大方阵的边长$l$，依次统计不同边长方阵中的像元数$N$，作$\ln N \sim \ln l$曲线，从图中直线部分的斜率确定分维$D_f$。随着$l$增大到接近图形的最大尺寸，$N$值将趋于饱和（即整个图形的面积），

因此，$l$的上限为$2R$（$R$是分形结构的回转半径）。

### 3．密度相关函数法

现在用密度-密度相关函数方法来计算分形结构的分维。密度相关函数$C(r)$定义为

$$C(r)=\frac{1}{N}\sum_{i}\rho(r_i)\rho(r_i+r) \tag{8-4}$$

密度函数可用$\delta$函数表示

$$\rho(x)=\sum_{i}\delta(x-x_i) \tag{8-5}$$

其中$x_i$对应于分形结构的位置。若该分形结构的分维为$D_f$，其嵌入空间欧氏维数为$d$，则在线度为$L$的区域$\Omega(L)$内，属于该分形的总的格点数目为

$$N(L)=\int_{\Omega(L)}\rho(x)\mathrm{d}^d x=\int_{\Omega(L)}\sum_{i}\rho(x-x_i)\mathrm{d}^d x \tag{8-6}$$

其中$\mathrm{d}^d x$是$d$维几何结构的微分元。考虑分形定义，有

$$N(L)\propto L^{D_f} \tag{8-7}$$

密度平均值为

$$\langle\rho\rangle_L\propto N(L)/L^d\propto L^{D_f-d} \tag{8-8}$$

考虑密度-密度相关函数的平均值形式，并利用上式，有

$$C(r)=\langle\rho(x)\rho(x+r)\rangle=L^{-d}L^{D_f}\rho(x+r) \tag{8-9}$$

式中平均符号〈 〉指对所有不同方向求平均，$C(r)$的意义是离一个粒子距离为$r$处发现另一粒子的几率。把式(8-6)代入式(8-9)，有

$$C(r) = L^{-d}\int \mathrm{d}^d x \sum_i \delta(x - x_i)\rho(x + r)$$

$$= L^{-d} \sum_i \rho(r + x_i) \qquad (8\text{-}10)$$

对于一个均匀分形，只要在分形结构上取定某点为原点，$\rho(r)$将只依赖于$r$的数值。可通过下式来定义$\rho(r)$

$$\int_{h(r)} \rho(r)\,\mathrm{d}^d r = \int_0^r \rho(r)\,s(d)\,\mathrm{d}r \propto r^{D_f} \qquad (8\text{-}11)$$

其中$h(r)$和$s(d) \propto r^{d-1}$，分别是半径为$r$的$d$维空间球域及其表面积，式(8-11)实际上是将三重积分化为一重积分。对式（8-11）两边求导数，有$\rho(r)s(d) \propto r^{D_f - 1}$，即

$$\rho(r) \propto r^{D_f - 1}/s(d) \propto r^{D_f - d} \qquad (8\text{-}12)$$

因为分形结构的总格点数为$N(L)$，所以，对均匀分形的$\rho(r)$求和，有

$$\sum_i \rho(r + x_i) \propto N(L) r^{D_f - d} \qquad (8\text{-}13)$$

把式(8-13)代入式(8-10)得密度-密度相关函数

$$C(r) = \langle \rho(x)\,\rho(x + r) \rangle \propto L^{-d} N(L) r^{D_f - d} \qquad (8\text{-}14)$$

再把(8-7)代入式(8-14)，有

$$C(r) \propto L^{-d} L^{D_f} r^{D_f - d} = L^{D_f - d} r^{D_f - d} \qquad (8\text{-}15)$$

对某一确定的分形结构，$L^{D_f - d}$为一常数，设为$K$，则

$$C(r) = K r^{D_f - d} \qquad (8\text{-}16)$$

从所获得的简单关系式中，不难得到分形结构的分维$D_f$。

只要统计不同$r$时的$C(r)$，并作$\ln C(r) \sim \ln r$曲线，从曲线的线性部分可以求得分维值。

### 8.1.4 分维的测量方法

分维作为分形结构的重要参量，与有关系统的许多物理性质密切相关。因此，如何通过实验测量和确定分维$D_f$，是一个非常实际和有意义的问题。已经发展若干测量方法。对于一个特定的系统，具体采用何种方法，取决于该系统的自然属性和长度尺寸范围。可以有两类测量方法：实空间测量和倒空间测量。

实空间测量分形维数的方法都是采用豪斯道夫维数的定义及其派生结果。最经典的例子是理查德逊(Richardson)对海岸线的测量方法。在完全不知道豪斯道夫工作的情况下，理查德逊发现测量海岸线的总长度依赖于其采用的测量标度，标度越精，海岸线越长。当绘出总长度$L$与测量标度$l$的双对数曲线时，得到一个斜率约为$-0.1 \sim 0.2$的直线。当时他并不了解其结果的重要意义，实际上直线斜率为$1-D_f$，这里$D_f$就是海岸线的分维。根据式（3-6）$N(l)=L/l \propto l^{-D_f}$，故此

$$L \propto l^{1-D_f} \tag{8-17}$$

而后，凯（Kaye）用同样的方法测定了碳黑的微粒子系统的剖面维数，$D_f=1.18$。

此外，其他有代表性的方法有：通过确定表面吸附单层分子的数目$N$与其平均半径$r$的关系($N \propto r^{-D_f}$)来测定多孔吸附材料粗化表面的分维；通过集团粒子的数目与其线度幂指

数关系，测定金胶体聚集的分维，$D_f=1.75$（图8-3）以及蛋白质分子骨架的分维。

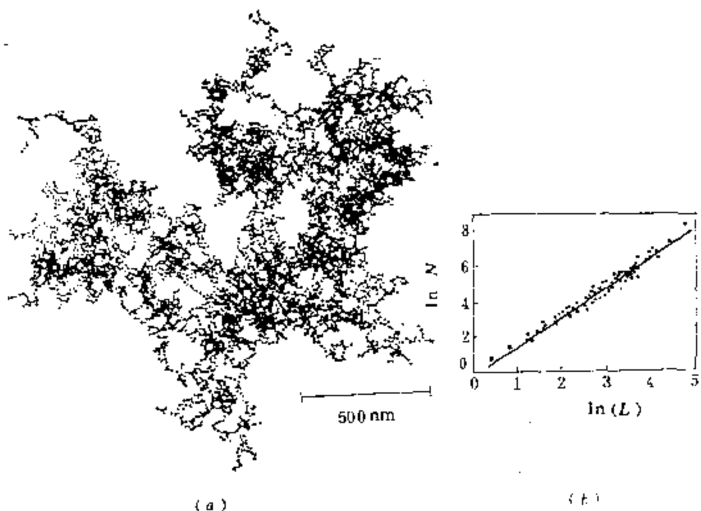



图8-3 金胶体凝聚

(a)透射电镜图像；(b)金粒子数N与标度l的关系

倒空间的测量有光散射，x射线或中子散射。采用小角度的光或中子散射测量是确定分维的一种有效的方法。基本思想是微分散射截面与被测系统的物质分布的富氏分量有关。如果此系统为分形结构，则分维必定在微分散射截面中得到反映，从而可以得到系统的分维值。如用x射线散射测得硅粒子的胶状聚集的分维$D_f=2.1$。

## §8.2 金属树的分形生长

许多实验报告表明，某些金属在其盐溶液中电解时，会

在阴极附近析出金属树或金属叶，具有分形性质。

让我们来介绍几个实验结果。在一个圆形的玻璃容器中盛2M $ZnSO_4$溶液，然后小心加入正丁基醋酸酯，由于两种溶液不相混溶，因而彼此之间形成一个分界面。用细碳棒或铂丝做阴极，从容器中心垂直插入，使铂丝或碳棒尖端刚好接触到两液体的分界面。阳极用锌片，做成圆筒状，套入容器，放置在与容器同心的位置。当两电极间加上电压后，金属锌就会在阴极尖端发生电淀积。这是因为锌离子只存在于容器中下层$ZnSO_4$溶液之中，而阴极尖端恰巧接触此溶液层。图8-4是锌金属叶，具有分形结构，实际上也是一种凝聚现象。用DLA模型来作计算机模拟，结果与实验相一致。

当实验装置改为电解槽时，锌金属树将在置于两液体的界面处的线型阴极上析出，不仅仅形成一棵树，而是形成金

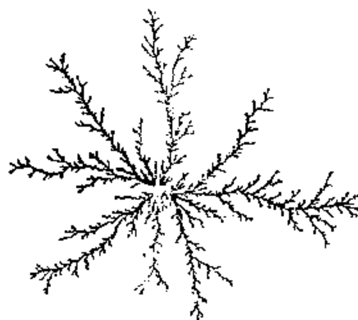


图8-4 锌金属叶

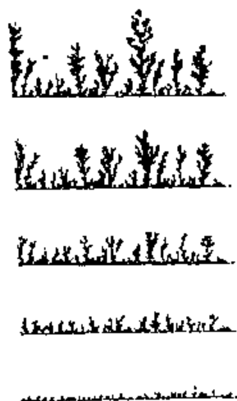


图8-5 锌树林生长过程

属林。图8-5是锌金属林随时间不断生长的过程。与DLA模型的模拟结果也是一致的。

锌树林的分维$D_f$定义为

$$N \propto R^{D_f} \tag{8-18}$$

式中$R$是金属树生长过程拍摄的各种大小金属树的厚度或高度的根均方值，$N$是相应像素的数目。10次独立实验分维的平均值$D_f = 0.72 \pm 0.06$与计算机模拟结果吻合得很好。这表明分形凝聚生长具有普适性，是一个很好的标度不变性的实例。在计算机模拟中，只产生$5 \times 10^4$个粒子，而实验中金属树含有数量大得多的锌原子，约为$10^{18}$个原子。尽管细节上有差别，但图形形状不受到影响，具有分形性质。可见电淀积或凝聚现象确实受分形规律的支配。

## §8.3 枝晶与分形

凝聚态物质的形态发生与选择问题的研究已成为分形物理的一个重要方面。形态发生与选择的内在机制是扩散控制与界面生长各向异性控制的互相竞争。水溶液晶体生长的形态发生与选择问题还鲜为人知。1986年日本学者本庄等，首次在过饱和$NH_4Cl$水溶液中观察到$NH_4Cl$晶体生长。实验装置很简单，$NH_4Cl$水溶液被封在两个相距为25.0μm的玻璃板之间，上面的玻璃板表面涂有导电膜以控制温度，下面的玻璃板有两种情况：表面粗糙的和表面光滑的。当用粗糙表面的玻璃板时，由于粗糙表面的无序性，对晶体生长起随机扰动作用，此时晶体生长模式具有分形性质，晶体的面积与回转半径$R$的关系给出分维$D_f = 1.671 \pm 0.002$。当用光

滑表面的玻璃板时，生长模式为枝状晶体，简称枝晶。

在中国科学院学部委员冯端教授的指导下，南京大学固体微结构实验室刘俊明实验研究了2维和3维$NH_4Cl$水溶液晶体生长的分形与枝晶及其相互转化。




图8-6 $NH_4Cl$的分形生长

通过控制生长元厚度$\delta$和过饱和度$\sigma$，来控制溶质扩散效应和生长各向异性效应的大小。$NH_4Cl$晶体生长过程的形态发生及发展用实时观测录像系统记录下来。

当生长结构的$\delta$小于70μm时，观测到分形生长，图8-6为$\delta=5\mu m$时，实时录像系统记录到的典型的分形结构，其分维$D_f=1.63$。当$\delta$提高到70μm时，若生长界面前沿的过饱和度$\sigma$较大，$NH_4Cl$将由分形生长向枝晶生长过渡，如图8-7所示，分维值由$D_f=1.74$变为$D_f=1.00$。图中$R$是回转半径，$M$是相应结构的质量，图中斜率为1的直线与斜率为1.74的直线相交于$T$点，对应于从分形生长向枝晶生长转化的转变点，它的存在说明了生长控制发生了变化，并认为枝晶为分形的一个特例，当形态由分形向枝晶转变时，其维数将向着减小的方向变化。

实验表明，当$\sigma$足够大时，无论$\delta$大小，都可以观察到枝晶生长。枝晶尖端轮廓线满足抛物线方程，同理论预言相一致。从整体结构上看，在枝晶与分形结构之间，实验还观测到一种畸变枝晶，如图8-8所示。这种畸变枝晶生长具有

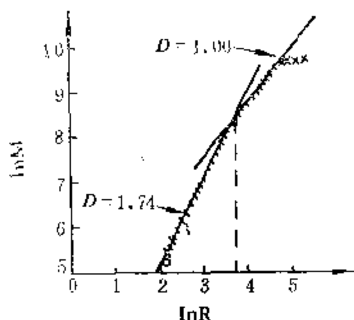



图8-7 lnM～lnR关系

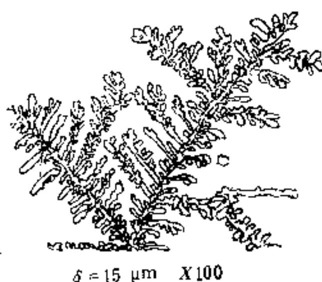



图8-8 畸变枝晶

一定的随机性，尖端无规分叉和不对称倾向分枝就证明了这一点。这种畸变枝晶作为规则枝晶向分形结构的过渡形态应引起重视。其分维$D_f$约为1.4～1.5。

在准二维系统中，当低粘度流体相与高粘度流体相相遇时，两相界面将很快由平面发展为不规则分叉状界面。这种界面结构称为粘性指（*viscous fingers*）。用分形论来分析这种结构显示了其发展的随机性。在$NH_4Cl$晶体溶液生长中也观测到类似的形态形成，具有分形性质。

$NH_4Cl$生长元厚$\delta=5\mu m$，可以视为准2维系统，加热到饱和点以上充分均匀溶解后以不同冷却速度冷却，可以获得不同生长饱和度$\sigma$。生长过程由实时录像系统记录。

实验显示，当$\sigma$很高时，为无规分叉粘性指状结构，$\sigma$由高到低时，液膜中将优生形成6分叉，5分叉和4分叉粘性指状结构（图8-9）。

分别测定了各种粘性指结构的分维，其值在1.60～1.67范围内，分叉程度高，$D_f$值也稍高。

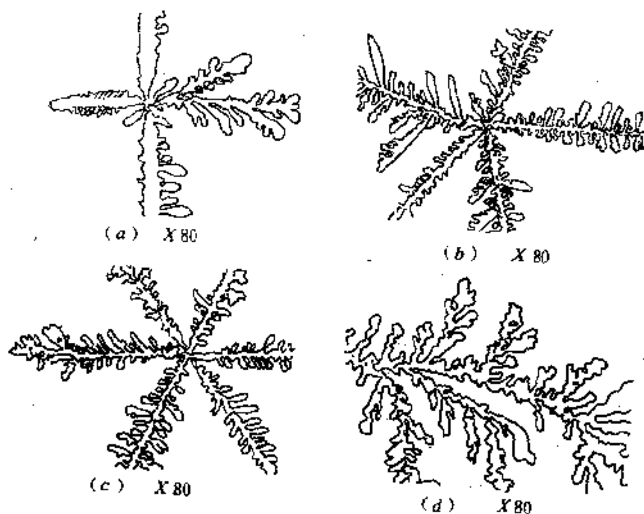



图8-9 2维$NH_4Cl$液膜中的粘性指状结构

(a)4分叉；(b)5分叉；(c)6分叉；(d)无规分叉




图8-10 $\delta=500\mu m$时 $NH_4Cl$规则枝晶

$NH_4Cl$为4次对称晶体，所以在3维生长系统中，形成4次对称分叉的规则枝晶，如图8-10。显然，在2维生长系统中，生长的各向异性效应被严重抑制。观察到分叉的无规性，由4次分叉，5次分叉，6次分叉，到无规分叉，生长的各向异性效应越来越小。测得的分维与按DLA模型的计算机模拟的结果是一致的。在模拟时要考虑生长的各向异性因素。

## §8.4 表面分形

表面科学是从60年代末发展起来的多科性的边缘科学。实验研究工作在超高真空条件下，研究材料（如金属、半导体等）表面5～20Å，即一个到几个原子层范围内，物质的成份、结构、电子能态和声子能态。对金属表面的腐蚀问题世界各国都很关注，全世界每年因腐蚀生锈而报废的钢铁达数千万吨，年产10000吨的化肥厂，由于腐蚀每年消耗的钢材高达100吨。实验发现，厚度约5至20Å的表面层成份，对腐蚀有密切关系。化工厂用催化剂来提高化学反应物的活性，提高生产效率，而催化作用与催化剂的表面状况密切相关。半导体表面的研究，对微电子技术是至关重要的。

目前表面科学的研究手段日趋完善，已经发展多种大型表面分析仪器和相应研究方法。分形将加入这个表面分析的行列。

固体表面往往是极其复杂的。存在弛豫、重构和台阶等结构变化，也存在成份变化，而物理的或化学的吸附是常见的。因而严格说，固体表面是非常混乱的，是一个不规则系统。可见，人们常常把固体表面看作2维的平面，复杂一些的以2维曲面看待，并非是正确的。分形论对这类不规则的复杂的表面提出不同往常的看法，以期对固体表面有更符合实际的了解。

### 8.4.1 化学表面分形

1983年以色列化学家浦费尔（P Pfeifer）和阿乌尼

(D Avnir) 等发表了有关非整数维化学的论文，对催化剂、吸附剂及载体表面的分形性质作了系统的阐述。这大大开拓了人们的视野。许多研究工作都表明，化学活性表面布满孔隙和皱褶，有人形容其结构犹如迷宫一般，反复卷曲延伸。对如此不规则的表面，传统的数学不再适用。

所以，在这种表面进行化学反应或吸附不能认为是发生在2维界面上，而应以大于2维接近于3维的系统看待。现以气固相催化反应为例，把催化剂视为“溶剂”，反应物视为“溶质”。表面过程看作是反应物或吸附质在固体(催化剂、吸附剂)表面形成固态溶液的过程。

催化剂表面的复杂程度不同，其分维也不一样。实验表明，催化过程与催化剂表面有着密切的关系。因此其分维值不同将对催化反应发生影响。催化剂表面分维与其催化性能的关系正成为人们十分关注的课题。人们期望表面分维成为催化剂的重要表征参量之一，为催化反应的机理研究和催化剂的评价提供新的途径。

### 8.4.2 化学活性表面分维测量

化学活性表面是指粗糙度与分子作用力的范围，为同一数量级的表面。这里介绍的方法与吸附有关，故称被测化学活性固体为吸附剂，用来进行吸附的气体称为吸附质。

现在用不同截面的吸附质对同一吸附剂进行吸附。假定有一完全平滑的固体吸附剂表面，如图8-11(*a*)所示。当进行单层吸附时，则吸附剂的表面积应为吸附质的截面积与被吸附的吸附质数目的乘积。如图8-11(*b*)所示。当改变一种截面积较大的吸附质时，则有类似情况，只是被吸附的吸附

质数目应少一些（图8-11(c)）。两次得到的结果应是相同的。定义单位质量吸附剂的表面积为比表面。所以两次测量的比表面是一样的。

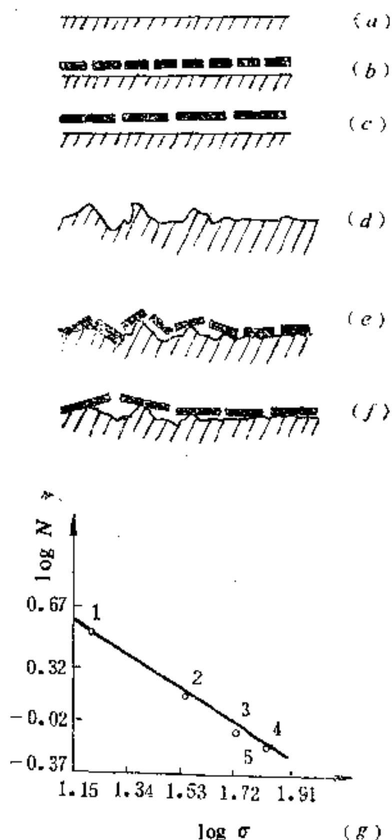



图8-11　固体表面分维测量

1-氮；2-苯；3-萘；4-蒽；5-菲

已经指出，化学活性固体表面在分子尺度上存在不规则性，凹凸不平。因此，当进行单层吸附时，因吸附质截面积不同而使测量结果有差别。吸附质分子截面越小，吸附剂的比表面积越大，如图8-11($e$,$f$)所示。显然，吸附剂比表面随吸附质分子截面不同而变化的变化率与表面分维有关。

假定吸附剂表面的分维为$D_f$，用半径$\varepsilon$足够小的吸附质分子去覆盖吸附剂表面（单层吸附），则所需吸附质分子数目$N$应与吸附质分子截面半径$\varepsilon$的负$D_f$次方成正比

$$N \propto \varepsilon^{-D_f} \tag{8-19}$$

假定有一个吸附质系列，系列中每种分子的吸附截面$\sigma$与截面半径$\varepsilon$的比值相同，即有

$$\varepsilon^2/\sigma = C \tag{8-20}$$

式中$C$对该吸附质系列是常数。将式(8-20)代入式(8-19)有

$$N = K\sigma^{-D_f/2} \tag{8-21}$$

表8-1是一个吸附质系列，其中有氮和若干芳香族碳氢化合物，对碳黑进行吸附的数据。利用这些数据，应用式

表8-1 氮和芳香族碳氢化合物在碳黑表面的单层吸附

| 吸附值 | $\sigma$(Å) | $N$(m mol/g) |
|---|---|---|
| 氮 | 16.2 | 3.33 |
| 苯 | 35.2 | 1.30 |
| 萘 | 52.9 | 0.80 |
| 菲 | 68.8 | 0.65 |
| 蒽 | 70.7 | 0.65 |

(8-21)，作吸附量$N$与吸附质分子截面$\sigma$的双对数图8-11($g$)，由曲线的斜率即可求出吸附剂表面的分维。该实验碳黑表面分维$D_f = 2.25 \pm 0.09$。这个方法中选择吸附质系列，使其满足式（8-20）的要求是很重要的。

### 8.4.3 地表、山峰、江河与湖泊

地球表面陆地约占30%，陆地地形通常是粗糙和不规则的。大地总是高高低低，起伏不平的，忽现高山，又下狭谷。在某些情况下，地表具有分形性。研究结果是地表分维介于2与3之间，而山峰的轮廓线，湖泊的湖岸线，海滨的海岸线是线型分形，分维介于1与2之间。



图8-12 亚马逊河水系

地表的江河溪流组成水系。水系的主流有许许多多支流，每条支流又各自有各自的小支流。大的水系可以有多层次的分支结构（见图8-12）。从统计意义上看，各层次支流

都与主流相似，是主流的缩影。也就是说，分布于地表，滋润着大地，养育着无数的植物、众多的动物种群以及我们人类的江河，是大自然在地表描绘的分形曲线，其特征可以用分维来表征。

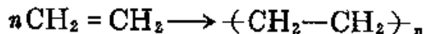
## §8.5 高分子的分形性

在化学中高分子已成为重要的分支学科，高分子的特征是具有很高的分子量，通常大于$10^3$，其结构特点是在空间形成长长的分子链。高分子可以分为两类：一类是生物高分子（也称大分子），如生物体中的核酸、蛋白质和多糖等；另一类聚合高分子，如塑料、橡胶和纤维等。

高分子概念是1920年斯道丁格（H Staudinger）确立的，他在1953年获得诺贝尔化学奖。几十年来，无论是高分子理论或是实际应用都有很大的进展。80年代以来，分形论在高分子科学中的引入，给这个原来就富有活力的领域增加了新的推动力。

### 8.5.1 结构的分形特征

高分子是由单体（也称小分子）通过化学聚合反应而合成的。例如日常生活中常用的聚乙烯塑料，是由乙烯小分子聚合形成的。



$$nCH_2=CH_2 \longrightarrow \leftarrow CH_2-CH_2 \rightarrow_n$$

反应式中，未发生反应的乙烯$CH_2=CH_2$称为单体，而聚乙烯中的结构单元$-CH_2-CH_2-$称为链节，$n$是链节数，也称为聚合度。

高分子有长长的柔软的链，在空间有各种不同摆布方式。高分子在空间的摆布方式称为构像（参见图3-10）。

已经提出两个模型，以便在数学上描述高分子的空间构像，即普通无规行走（*Nomal Random Walk*，NRW）和自回避无规行走（*Self-avoiding Random Walk*，SAW）模型。

1905年皮尔逊（K. Pearson）在英国《自然》周刊上发表的论文写道：一个人从原点$O$开始，沿某一直线走出$l$码，然后他转过任意角度，沿另一直线走出$l$码。他重复这一步骤$n$次。欲求出$n$步之后，他处于离开原点距离$r$和$r+\mathrm{d}r$的几率。

皮尔逊的文章发表后，雷利（L. Ray Leigh）立即指出，他早在1880年就提出了同样的问题："$n$个同周期但相位无规的振动之合成。"

我们且不去追究谁是第一个提出这个问题的人。实际上，早在1827年就发现了无规行走的典型事例，即布朗运动。NRW不考虑链节间的相互作用，与布朗粒子的运动轨迹类似，分维$D_f=2$。SAW模型考虑到链节间的相互作用，具有"记忆"效应，原先走过的路径不再重复行走。此模型在数值计算中很接近实际情况，即SAW模型真实地反映高分子链。

高分子链可以划分为链段，链段包含若干链节。链段与整体的形态相似，是链整体的缩影。换句话说，高分子链的局部与整体具有自相似性，所以高分子链是分形结构。

### 8.5.2 分子链的分维

高分子链在空间有不同的构像，把分子链两末端间的距

离称为末端距(*end to end distance*)，记为$R$(图8-13)。美国著名高分子学家弗洛里(J Flory)在高分子理论和实验作出重大贡献，1974年获诺贝尔化学奖。他对高分子体系的分析导致分维的获得。我们根据分形体系的自相似关系，可以认定此处$R$相当于相似比$\beta$的倒数，即$R\propto 1/\beta$，而聚合度$n$是体系的生成物数目$N$，则对高分子链有标度关系

$$N\propto R^{D_f} \tag{8-22}$$

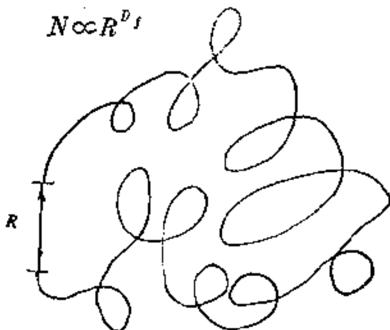



图8-13 高分子链末端距

进一步分析表明，自回避无规行走模型中分子链分维$D_f$明显依赖欧氏空间维数$d$，德金斯(G de Gennes)推得如下关系

$$D_f=(d+2)/3 \tag{8-23}$$

当$d=3$时，$D_f=5/3=1.66$。我们已经得到对NRW模型$D_f=2$。可见，受限制的自回避无规行走要比普通自由的无规行走模型要驯服一些，规则一些。

### 8.5.3 分子链的局域分维

用平均末端距$R$来表征高分子链的构像，能解决许多高

分子的分维问题。但对单链高分子有其不足之处，因此，提出了局域分维(*local fractal dimension*)$D_{fl}$。

分子链的分形性质决定了利用分维来表征其形态特征的有效性。局域分维$D_{fl}$是对分子链的局域长度标度定义的，就是计算一条分子链的某一部分的分维。我们从一条由$N_0$个链节的分子链中取出含有$N$个链节的一段链，这个链段的末端距的方均距为

$$\langle R_N^2 \rangle_{N_0} = \frac{1}{N_0 - N + 1} \sum_{i=1}^{N_0 - N - 1} \langle R_{i,i+N}^2 \rangle_{N_0} \tag{8-24}$$

式中$\langle R_{i,i+N}^2 \rangle_{N_0}$是链中第$i$个链节和第$i+N$个链节之间的方均距。考虑到分子链具有自相似性，所以，若长度为$a_j$的链段中链节数为$b_j$，则有

$$b_{j+1}/b_j = (a_{j+1}/a_j)^{D_{fl}} \tag{8-25}$$

当在某一标度范围内，$D_{fl}$不依赖于$(a_{j+1}/a_j)$时，$D_{fl}$为分子链的分维。如果$D_{fl}$与所取的链节数$N$无关，则有

$$[(\langle R_N^2 \rangle_{N0})^{1/2}]^{D_{fl}} = AN \tag{8-26}$$

式中$A$是比例常数。此式可以作为局域分维的定义。这样我们容易求出分维值。

## §8.6 准晶分维结构

在大自然界，有形形色色的固体物质，五光十色，瑰丽多彩！固体物质有各种分类方法，如可以分为导体与非导体，磁性与非磁性、透明与不透明，硬性与软性，脆性与韧性，

有机与无机等等。就结构而言，固体物理的传统分法是晶态与非晶态两类。晶态的主要特点是组成晶态的原子、离子或分子在所占有的空间作有规则周期性的排列。晶态的这种特点称为长程序。如水晶、云母和单晶硅等。而非晶态内部原子的排列不具有周期性，更确切地说，是不存在长程有序性，但有短程序。如玻璃、塑料和非晶硅等。

固体物理是建立在晶态长程有序的基础之上的，并证明晶体的旋转对称性只存在1，2，3，4和6度旋转对称轴，而不存在5度和6度以上的旋转对称轴。这一传统的观念终于在80年代初被否定了。1984年谢克特曼（D Shechtman）等在微米大小的铝锰(Al-Mn)合金颗粒中发现5度对称的衍射图，这就是20面体准晶态的发现。这一重大发现已被我国科学家彭志忠证明，准晶态的形成是受分形规律制约而构成分维结构的。准晶态是介于晶态与非晶态之间的新的凝聚态。

近年来，相继在铝铁(Ac-Fe)，铝铬(Al-Cr)，钛钒镍($Ti_{0.9}V_{0.1}$-Ni) 和钒铬镍硅 (V-Cr-Ni-Si)等合金中发现准晶态。这些准晶态是在急冷条件下形成的，是亚稳态。最近通过慢冷却得到稳定的准晶态镓镁锌(Ga-Mg-Zn)和铝锂铜($Al_6Li_3Cu$)合金。

### 8.6.1 形态发生原理

在5度对称准晶格的研究中，发现准晶结构形态发生是基于20面体原理和黄金中值原理。分析表明20面体配位在能量上最为有利。每个配位原子都是等效的，每个原子周围的其他原子是均等分布的，各联线的夹角均为60°，因此能量分布均匀，结构最稳定。20面体原理不仅适用于原子、分子的尺

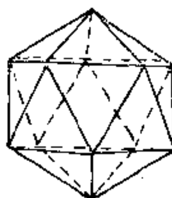


图8-14

度范围，也适用于更大的尺度范围，如球形颗粒聚集，细胞的生长等也适用。图8-14是20面体配位。

黄金中值原理是自然界形态发生的重要原理，是一个自然和谐原理，在动物繁衍和植物生长中得到了广泛反映。在尺寸大小比，种类数量比和增长速度比等方面，常出现黄金中值。黄金中值是一个无理数，其值为

$$G_m = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.618\cdots \quad (8\text{-}27)$$

而其倒数称为黄金分割数

$$1/G_m = [(\sqrt{5} - 1)/2]^{-1} = 0.618 \quad (8\text{-}28)$$

我们来分析具有5度对称的正五边形，从图8-15可以看出，五边形中相间角顶点的联线构造出五角星，而在后者的中央又形成一个小五边形，再重复上述操作，又可构造出更小的五角星和更小的五边形，等等。令人感兴趣的是五边形中各联线的交点都处于黄金分割位置，而相邻五角星与五边形的边长比等于黄金中值。从图8-15还引出一个数列，这数列为斐波纳奇(Fibonacci)数列。图中出现两个基本长度$a$和$b$，而$a/b = 1.618\cdots$。斐波纳奇数列用$F_n(n = 0, 1, 2, 3\cdots)$表示，该数列具有以下性质。

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2) \quad (8\text{-}29)$$

$$F_{n+1}/F_n = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.618\cdots, n \to \infty$$

表8-2列出$F_n(n \leqslant 19)$的数值。

表8-2　斐波纳奇数列

| $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 8 | 10 | 89 | 15 | 987 |
| 1 | 1 | 6 | 13 | 11 | 144 | 16 | 1597 |
| 2 | 2 | 7 | 21 | 12 | 233 | 17 | 2584 |
| 3 | 3 | 8 | 34 | 13 | 377 | 18 | 4181 |
| 4 | 5 | 9 | 55 | 14 | 610 | 19 | 6765 |

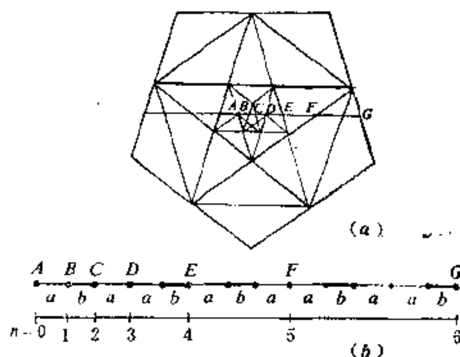



图8-15　正五形与斐波纳奇数列

按照准晶结构形态发生两原理，可以得到准晶态理想格子。图8-16中每一点代表一个配位20面体，沿$ABCD$按$F_n$数列向两边递推，在$EF$间取$EG=a$，$GF=b$，使$a/b=0.618\cdots$（图8-16($a$)）或$a/b=1.618\cdots$（图8-16($b$)）按对称原则求$H$、$I$、$J$、$K$各点，沿各线方向按$F_n$数列向两边递推，如此推导下去即可获得整个准晶格。图8-17是5度对称准晶态投影图。

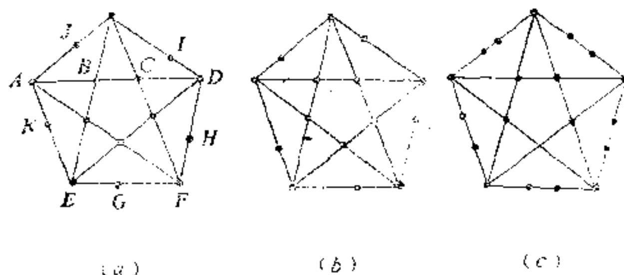
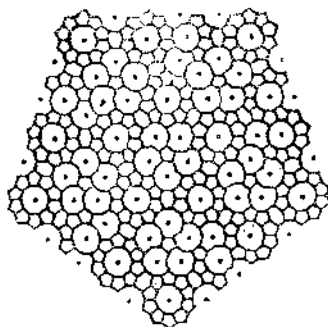


图8-16　准晶格推导


图8-17　5度对称准晶格投影图

### 8.6.2　准晶格的计算机绘图程序

准晶态分维结构模型可概括为：以20面体为基本单元，黄金中值$G_m$的平方为自相似比，利用分形自相似放大原则，将20面体基本单元向空间扩展。这种分维结构可以理解为结构的重复周期在尺度上有变化，即其相邻重复周期以黄金中值为比值变化。图8-18是沈步明利用微机绘制的准晶分维结构的平面投影图和电子衍射图，与实验测量结果相一致。中心有一个十方环，即20面体的平面投影，十方环中心有一个Mn原子，十方环交点为Al原子，五个Al原子在上，五个Al原子在下，在中心Mn位置的上下各有一个Al原子，形成$Al_{12}Mn12$配位20面体。在中心十方环外面包围

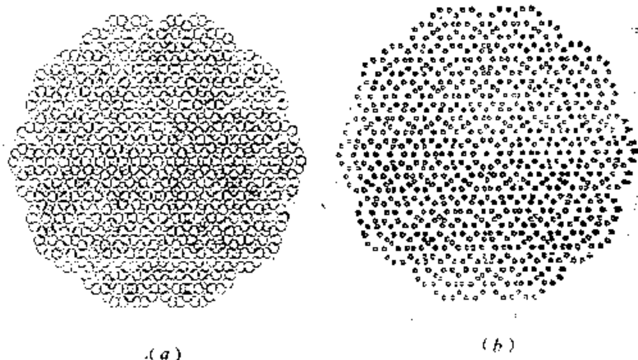



图8-18 (a) 准晶格平面投影；(b) 电子衍射图

着十个相似的十方环，它们构成一个较大的十方环。以此类推，一环套一环，每级之间都放大$1.618^2$倍。设$N$为放大的级数，则$1.618^{2N}$为该级的放大倍数，这样放大$N$级后得到的所有十方环位置坐标为

$$
\begin{aligned}
P(N,x)=M[&L_N F^{2N}\cos(36\cdot W_N)+L_{N-1}F^{2(N-1)}\\
&\times\cos(36\cdot W_{N-1})+\cdots+L_3F^6\cos(36\cdot W_3)\\
&+L_2F^4\cos(36\cdot W_2)+L_1F^2\cos(36\cdot W_1)\\
&+\cos(36\cdot W_0)],\\
P(N,y)=M[&L_N F^{2N}\sin(36\cdot W_N)+L_{N-1}F^{2(N-1)}\\
&\times\sin(36\cdot W_{N-1})+\cdots+L_3F^6\sin(36\cdot W_3)\\
&+L_2F^4\sin(36\cdot W_2)+L_1F^2\sin(36\cdot W_1)\\
&+\sin(36\cdot W_0)]\\
&(W_N,W_{N-1},\cdots,W_1,W_0=0,1,2,\cdots,10)
\end{aligned}
\tag{8-30}
$$

其中$F=1.618$，$M$为最小单位晶胞（或原子）的半径，$L_N$

取0或1，$W_0, W_1, \cdots, W_N$分别对应于$W$为$0, 1, 2, \cdots\cdots, N$各级放大循环量，每次放大一级，要增加一个循环量。

从图8-18可以看到树枝状结构。这个分叉结构是一个开放系统在远离平衡态下自发形成的耗散结构。这种结构不具平移对称，具有自相似性和分维性。利用这个程序绘制的准晶的电子衍射图与海拉格（K Hirage）的高分辨显微像基本相一致。

### 8.6.3 分维计算

准晶体结构中，在三维空间，一个20面体经一级放大后，增12个20面体，加上中心的20面体共13个，即$N=13$。利用相似维数$D_s$来计算分维。这里相似比为

$$\beta=\frac{1}{((\sqrt{5}+1)/2)^2}=\frac{1}{1.618^2} \qquad (8\text{-}31)$$

则分维

$$D_s=\ln N/\ln\beta=\ln 13/\ln 1.618^2=2.6652\cdots$$

式中13体现了20面体原理，$1.618^2$体现了黄金中值原理，因此，分维$D_s$是准晶分维结构的综合表征。

## §8.7 分形生长及其模型摘要

分形生长的实验证据是十分充足的，并通过计算机模拟，建立了若干分形生长模型。前面已经对某些分形生长的实验研究和模型作了介绍。包括电化学淀积、液体中的晶体生长、枝晶生长和准晶等实验研究，并介绍了DLA模型和KCA模型的计算机模拟。这里对其他一些分形生长的实例

及某些模型作一简要介绍。详细内容，读者可以阅读参考文献。

### 8.7.1 超导薄膜

埃拉姆（W Elam）在溅射淀积的Nb-Ge合金超导体薄膜中发现分形结构，其分维$D_f=1.7$。薄膜淀积在石英衬底上，衬底温度840°C，薄膜厚度为200～500nm。

通常在薄膜淀积初期都形成不均匀结构，形态很不规则，枝叉少，枝叉曲率较大，比较圆滑，与DLA模型不同。其原因除了表面张力、周界扩散外，衬底表面上的扩散步长大，是重要原因。所以，薄膜生长初期分维较高。

### 8.7.2 非晶薄膜的晶化

莱德诺兹(G Radnoczi)在$GeSe_2$非晶薄膜的晶化研究中，发现枝叉状晶化区，其尺寸约0.1μm，具有多晶结构，其分维$D_f=1.69\sim1.73$。晶化产生于Se富集区。

黄立基、柳百新等人研究了离子注入对于Ni-Zr和Ni Mo合金膜的影响，发现在一定注入剂量下（对Ni-Zr为$9\times10^{14}Xe/cm^2$，对Ni-Mo为$7\times10^{15}Xe/cm^2$），形成枝叉状晶化区，具有分形结构。分形集团的质量$M$与集团的大小$r$的关系为

$$M(r)\propto r^{D_f}$$

两种合金膜中发现的分形结构的分维分别为1.4和1.7。

吴自勤等在Au/a-Ge和Pd/a-Si等双层薄膜的退火实验中，发现形成枝叉晶化区，利用*Sandbox*方法和相关函数方法计算了在不同退火温度下形成的分形结构的分维值。表

8-3为不同温度下分形区的分维。

表8-3　不同温度晶化区的分维

| 温度 (°C) | Sandbox方法 | | 相关函数方法 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $D_f$ | 相关系数 | $D_f$ | 相关系数 | 相关长度 |
| 100 | 1.785±0.01 | 0.999 | 1.789±0.014 | 0.981 | $6\leqslant r\leqslant 40$ |
| 200 | 1.808±0.008 | 0.999 | 1.816±0.016 | 0.990 | $4\leqslant r\leqslant 25$ |
| 300 | 1.980±0.017 | 0.999 | | | |

在室温时，非晶锗处于亚稳态，退火时，晶界和双层膜的界面将为分形集团非平衡生长提供初始核的择优形成点，然后沿侧向生长。在锗晶相生长过程中，释放出潜热，会在正在生长的分形结构的周界外触发新的晶核，经过晶界和界面的物质输运，使锗聚集在分形区。上述过程不断地相继进行导致分形集团的生长。非晶态区域所获得的能量越多，形成晶核的几率$P$越大。实际上，晶化时释放出的晶化热在分形结构周围形成一个温度场，温升随时间而下降，于是成核几率随时间而衰减。后继的晶化又产生新的温度场，所以随着分形的生长，晶化引起的温度场也逐步向外延伸扩展。于是提出随机相继成核模型。

### 8.7.3　电介质击穿模型

1984年奈密尔（L. Niemeyer）等研究了两平行玻璃板之间$SF_6$的放电现象，对枝叉状放电图形（图8-19）进行计算机模拟，并称为电介质击穿模型（*Dielectric Breakdown Model*, DBM）。

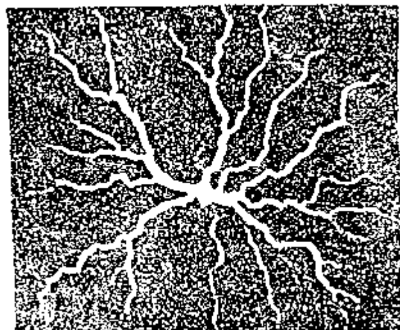


图8-19　电介质击穿的计算机模拟

现在简要介绍模拟过程。在2维空间，选择一个方点阵（图8-20），点阵中心放置一电极，此处电势$V=0$，在远离中心的圆周上置另一电极，此处的电势为$V=1$。电击穿从中心开始向外随机传播，介质击穿后被认定变成理想导体，各

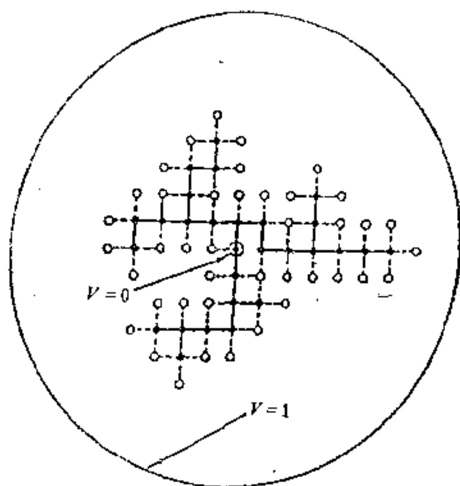



图8-20　电介质击穿的点阵模型

处的电势均为零，即$V=0$。这样，此电介质击穿过程可以用拉普拉斯方程来描述：

$$\nabla^2 V = 0 \tag{8-32}$$

为了进行计算机模拟，将式(8-32)离散化，即在上述边界条件下，解间断型拉普拉斯方程：

$$(V_{i+1,k} - 2V_{i,k} + V_{i-1,k}) + (V_{i,k+1} - 2V_{i,k} + V_{i,k-1}) = 0 \tag{8-33}$$

式中$i$和$k$分别是$x$和$y$方向阵点的编号。计算机模拟就是在直径为几十到几百点阵常数的圆内，用迭代法求数值解，得到所有阵点的电势$V_{i,k}$。

规定所有击穿阵点的最近邻是下一步击穿的对象，即图中的小圆圈。击穿几率$P$是最近邻阵点电势差的幂函数

$$P = (V_{i+1,k} - V_{i,k})^m \tag{8-34}$$

或

$$P = (V_{i,k+1} - V_{i,k})^m \tag{8-35}$$

这里$m$是可以选择的数。令所有小圆圈的击穿几率之和为1，并分别分配给它们一定的数值区间，于是在0和1之间产生的随机数决定哪一个阵点被击穿，击穿后用实线连结。然后继续上述过程，使击穿图形不断向外延伸扩展。

当$m=0$时，表示击穿几率与电势差（等于电场强度）无关，即图中各小圆圈的几率相同，显然分维值应为2。当$m=1$时，DBM模型与DLA模型相一致，它们的生长几率都与场梯度成正比。

沙特帕（S Satpathy）在3维空间模拟3维场的2维击穿图形和3维场的3维击穿图形，计算了$m$不同取值对分维的影响。表8-4是分维$D_f$随$m$变化的计算值。图8-21是3维

表8-4　分维$D_f$随$m$变化的计算值

| 场维数 | 击穿图形维数 | $D_f$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $m=0$ | $m=1$ | $m=2$ | $m=3$ | $m=4$ |
| 2 | 2 | 2 | 1.75 | 1.6 | | |
| 3 | 2 | 2 | 1.96 | 1.82 | 1.78 | 1.69 |
| 3 | 3 | 3 | 2.48 | 2.11 | 1.96 | 1.75 |

场中2维电介质击穿。

从表8-4可以看到，三种情形下，$DBM$图形的分维均随$m$的增大而下降，从趋势可以推想，当$m$很大时，生长几率实际集中在一个突出的尖端，因为此处场的梯度最大，这就会导致线型生长，因而分维$D_f$趋于1。

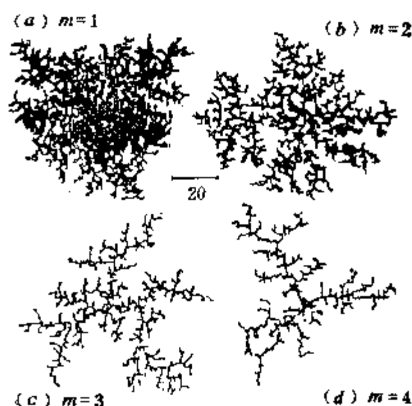



图8-21　3维场中2维击穿图形

### 8.7.4 粘滞指模型

粘滞指模型(*Viscous Fingering Moled*, VFM)是在海尔-肖盒(Hele-Shaw Cell)中研究低粘滞性液体对高粘滞性液体的驱赶现象后提出的。低粘滞性液体在高粘滞性液体中形成分叉图形，即所谓指进现象（如图8-22），据此提出粘滞指模型。实验可在条形盒，也可在圆形盒中进行。小盒由两相距0.5mm的玻璃板组成。对条形盒，液体从一头

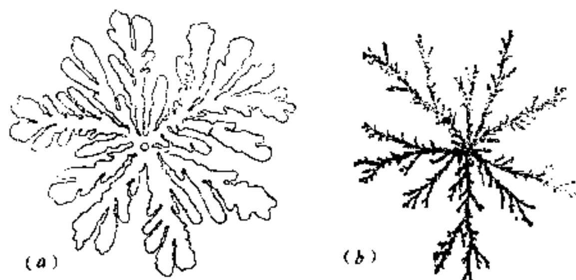



图8-22 粘滞指图形

（a）空气驱赶甘油；（b）水驱赶高粘度溶液

小孔注人，从另一头小孔出去；对圆形盒，液体从中心小孔注人，从圆周处流出。先注入高粘滞性液体，再注入低粘滞性液体，这时就可看到低粘滞性液体的指状分叉图形。用摄像机把图形变化的情况拍摄下来，可以发现图形与DLA模型图形很相似，其分维值与DLA模型也相近，而且可用与*DBM*模型类似的方法进行计算机模拟。

通过上述的讨论，可以看出，无论是DLA，DBM，还是

KCA,VFM模型，都可以用拉普拉斯方程来描述，只是生长几率有所不同。因此，可以把它们归结为拉普拉斯分形。在此基础上，皮特罗诺（L Pietronero）等提出拉普拉斯分形理论。

### 8.7.5 粘滞指进与石油增产

石油在能源结构中居于举足轻重的地位。在现有条件下，如何提高石油产量成为人们关注的问题。

目前普遍采用的人工注水开采原油的工艺虽有许多优点，但是，注入的水是低粘滞性流体，它在地层中驱赶高粘滞性原油时，形成粘性指进现象，使人工注水技术效率大为降低。据估计储层中大约50％原油开采不出来。因此，深入了解这种现象，找到控制这种现象的方法就具有十分重大的经济意义。然而，由于粘性指结构的复杂性，使得传统方法很难予以定量描述。所以，这方面研究进展不大。用分形理论来分析提高石油采收率的方法，可望为原油采收率的大幅度提高开拓一条新途径。

上一节已介绍了粘滞指模型，当用一种低粘滞性液体去驱赶一种高粘滞性液体时，其界面并非是齐头并进的，而是呈现出指状多层次分叉前进的状态，称为粘性指进现象。

油田要维持长期稳定生产原油，利用人工注水法是必要的。如采用五点布井法，即在一个大体上是正方形的地域，正方形的四个顶点上各有一口油井，则正方形的中心点作为注水井，施行人工注水，驱动原油注入油井。但是，人们发现，注入的低粘度水在地下多孔介质中驱动高粘度原油时形成粘滞指现象，使驱动效率大为降低，更严重的情形是当水

的细指在注水井与采油井之间破裂时，开采出来的不是原油，而是水！

在海尔-肖盒实验中表明，当界面毛细准数

$$N_{ca}=\mu V/\sigma \qquad (8\text{-}36)$$

增加时，会出现分叉现象。这里$\mu$是粘度，$V$是注入液体的速度，$\sigma$是表面张力。当$N_{ca}$进一步增加超过某一临界值时，将出现自相似分形粘滞指结构（见图8-22）。对于一定分维的粘滞指结构，必对应一组工艺参数，如$\mu$，$V$和注水时的压力$P$等，改变工艺参数，就会得到不同的分维值。于是建立分维值、粘滞指和工艺参数之间的一一关系。也就是说，通过调节工艺参数，来控制粘滞指的形成，进而寻找优化的工艺参数，以便获得最高的石油采收率。

## §8.8 化 学 钟

所谓化学钟，是化学反应中出现的化学振荡现象，称为贝洛索夫-扎博廷斯基(Belousov-Zhabotinski)反应，简称BZ反应。BZ反应在非平衡条件下，展现出引人入胜的性态。生物体也是一个远离平衡态的体系，是耗散结构体系。因此，生物体也存在多种振荡反应。生物钟的存在，提醒人们：没有振荡反应，生命也就不复存在。所以，开展振荡反应的研究，对认识生命过程是有重大意义的。

在600ml的蒸馏水中，依次溶入16g丙二酸（0.25M），6g溴酸钾(0.06M)，2～4ml指示剂：0.05g邻菲罗啉和0.07g硫酸亚铁溶于10ml水中配成，0.5g硝酸铈（$Ce(NO_3)_4\cdot6H_2O$），在搅拌的情况下，加入26ml硫酸(0.8M)。由于

搅拌使物质充分混合，体系实际上每时每刻在反应容器内保持均匀。如果在反应容器上装置有可以有效地按不同速率将化学药品泵入（或泵出）的系统，则可以控制一种物质在反应容器中不同的滞留时间，非常长的滞留时间会建立均匀定态，实现细致平衡为特征的性态，即正反应与逆反应具有相同的反应速率。现在通过减小滞留时间使正反应与逆反应不再平衡，则将看到完全不同的性态构型。突然间，蓝色出现了，说明反应容器中有过量的$Fe^{3+}$（或$Ce^{4+}$）离子在体系中出现，然后蓝色突然消失，代之以红色，说明出现过多的$Fe^{2+}$（或$Ce^{3+}$）离子。如此反复出现，周期性地由蓝色变红色，又由红色变蓝色，往复振荡，周期约30秒，这种奇异现象可持续1小时之久。这种以准确固定的周期和振幅有节奏地变化的性态，只取决于实验参数，说明是体系固有的，是一种化学自组织现象。这种振荡通过体系内部产生的动力特性来度量时间，构成了化学钟。在这里我们又看到时间对称破缺的现象。

化学振荡是一种规则的周期运动现象。但当条件发生变化时，振荡频率可能失去稳定，产生新的振荡频率。而当条件发生进一步变化时，以新频率振荡的性态也将失稳，产生更新的频率。也就是说，这是一个分叉过程，而且是逐级分叉，振荡频率会越来越多，体系的时间特性会变得十分复杂，最后走向混沌。

## §8.9 自然景观仿真

自然界众多景观举不胜举，桂林山水秀丽多姿，三峡天

险气势磅礴，无不令人留连忘返。计算机科学的发展，使得我们有可能对这些天下美景奇观进行仿真，而显示于屏幕之上。

### 8.9.1 计算机视觉仿真

有一类自然景物，例如蓝天、云彩、山脉、湖泊、烟柱和火焰等，可以用粗糙的多面体模型来作初步描画，进而通过在稀疏控制点数据之间，进行随机内插，来完成对自然景物的逼真仿造。算法的关键在于随机插补必须保证自然景物的自相似性。

自相似性，在视觉仿真技术中，就是自然景物必须具有如下性质：人们距离景物越近，看到的细节越多，同时整体形状特征不变。也就是说，视觉仿真是建立在分形论基础之上的，受到分形规律的制约。

在算法上，采用简单的线性图形基元，取线性随机中点内插，有

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}+r\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad (8\text{-}37)$$

式中$r\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$是高斯型随机函数，此式具有递归细分之意。将这种算法用于构造景物的三角形图形基元时，其程序是对母三角形△的每一条边都应用式(8-37)，将所得的三个沿某方向扰动后的点适当连接，形成四个子三角形$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$和$\triangle_4$。对每个子三角形，仍应用上述细分和内插过程，直至满足终止条件。每个满足终止条件的三角形，在进行扫描转

移和明暗处理时，其灰度或色彩决定于三角形本身和从母三角形因袭下来的相应参数，并由常规的明暗处理技术产生。用具有递归调用功能的C语言编写这种算法程序，可以相当简捷和易懂。

### 8.9.2 山峦景观构型

先讨论2维平面上的不规则形状曲面的产生问题。平面上田字形网格的4个顶点为初值，各边的中点为插值与随机数之和，记为0级田字格；然后，每个格子再分成4等分，每个新的田字格的4个顶点值，设为原4个顶点的变位量与随机数之和，这样，得到1级田字格；如此依次得到2级，3级……等田字格，不断重复这一递归过程，直到满足所要求的级为止。于是得到一个随机自相似网格。只要在这些网格上赋予高度值，即可产生山体形状，但缺少起伏感。如果把这一方法推广到3维网格上去，就可以产生富有真实感的具有立体起伏的山峦景观。

3维随机自相似网格的产生过程，同2维的情形一样，也是通过递归构成的。0级递归的基本处理方法，是初始设定的立方体的8个顶点，进一步分成8个等同的小立方体，实现1级递归；……等等。若$R$为递归深度，则每个边包含有$2^R+1$个格点的立方格子。

### 8.9.3 蓝天、彩霞与质感

为了得到各种景物的良好质感，需要用扫描线或光线追踪的方法产生屏幕上具有真实感的彩色图形。在彩色图形中还可以为起伏的群山加上雪冠，其方法是在一定标高以上设

定白色；如果设定淡青色，还可以产生天空光学反射效果；如果把数组元素的编号在两端点互换一下，就可以产生环形山的效果；如果采用计算机图形学中的映射技术，还可以产生柱形、球形山峦景观；也可以模拟地球或其它星球的表面形貌。

实际上，上述方法不仅可以直接仿真清晰景物，而且可以推广到模糊景物逼真图形的产生。只要用很少的控制参数即可产生云彩、烟柱和火焰等模糊景物。

现在以云彩的产生为例作一简介。该算法有二个假设：1° 作为每一云块属性之一的密度是均匀的，且能被一不很复杂的多面体所包围；2° 在给定的视场中，云块表面每一点$P$的亮度或色调由下式决定

$$I = I_g + \alpha(I_b - I_g) \tag{8-38}$$

式中$I_g$为按常规明暗处理法求得的亮度值，$I_b$为背景值，$\alpha$是内插系数，且$0<\alpha<1$，与普通的透明系数不同，此处$\alpha$是$l$的函数，$l$是由视点出发且穿过$P$点的半直线在云块中的行程。当$\alpha$越接近1时，云层越薄，则作为背景的蓝天将隐约可见；反之，$\alpha$越接近0，则云层越厚，表示乌云遮住蓝天。如果同时与山峦显示相配合，就可以生动逼真地表现陡峭的山峰与映照着彩霞的高原风光了。

# 第九章 分形生物学

自然界生物种类极其繁多，形态各异，多姿多态，构成绚丽多彩的生物界。生物界是自然界最富生气最具神秘的领域。生物在自然界的空间分布十分广泛。广阔的大平原，海拔10000m以上的高空，海平面10000m以下的深海，到处都有生命的痕迹。从时间的角度考查，32亿年前细菌已活跃在地球上。据信此前已有生命活动。所以，生物学家认为至少在34亿年前就有生命了。宇宙间到底有多少种生物，难以得到确切的答案，估计在200万种以上。面对如此庞大的生物种类，进行科学分类是十分必要的。生物学家的重大使命就是根据生物的形态和生理功能，进行分类，一直到1859年，达尔文的巨著《物种起源》发表后，才真正建立起以生物进代论为中心的分类学。1926年摩尔根（T Morgan）发表了《基因学说》，1953年华特生（D Watson）和克里克（C Crick）关于脱氧核糖核酸（DNA）分子双螺旋模型的建立，使生物学进入现代科学的行列，创立了分子生物学，与物理学和化学相汇合。

看来生物学已发展得相当完善，但仍有若干重要的问题，没有作出论述，或尚未对某些现象作出理论解释。如生物体内部各层次（生物大分子、细胞、组织器官等）与整体之间存在什么关系？这种关系对生物体的生物化学组成、形态、生理和病理等有何影响？分形生物学将对这些问题作出

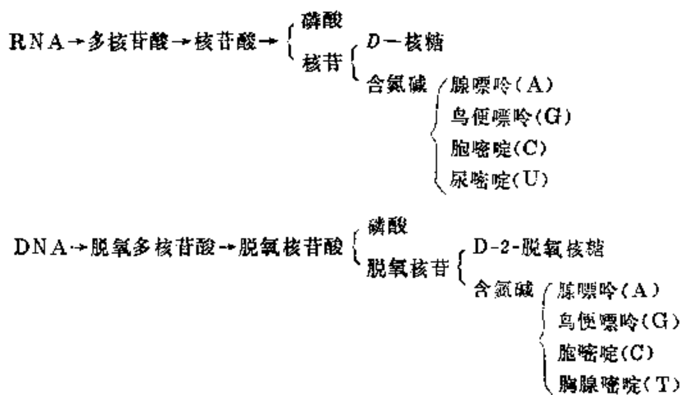
解释，并将对农业增产，林业发展，中药选择，以至于临床诊治等，作出指导性论述。

## §9.1 基因复制

### 9.1.1 核酸

核酸存在于细胞内，不仅存在于细胞核内，也存在细胞质中。它同蛋白质和酶一样，是生物体内一类具有生物作用的天然大分子有机化合物，是生命活动中不可缺少的物质。现在已经可以在分子水平上说明核酸的贮存，复制和传递遗传信息。

核酸的组成元素，主要是碳、氢、氧、氮和磷。其中氮占15～16%，磷占9～10%。天然的核酸用酸完全水解后，最终产物为核糖或脱氧核糖。根据糖性质的不同，可分为两类：含D-核糖的称为核糖核酸（RNA），含D-2-脱氧核糖的称为脱氧核糖核酸（DNA）。水解产物如下



### 9.1.2 基因的本质

早在1875年赫特维奇在显微镜下观察了海胆卵在天然状态下，受精过程的每一个阶段。并由此断言：受精取决于出现性分化的细胞核的融合。实际上植物受精与动物也是一样的。图9-1是哺乳动物精子和卵融合过程示意。双亲的卵子和精子结合成合子，然后合子发育成与亲代相似的新个体。因此，人们认识到遗传物质一定要在细胞水平上去寻找。

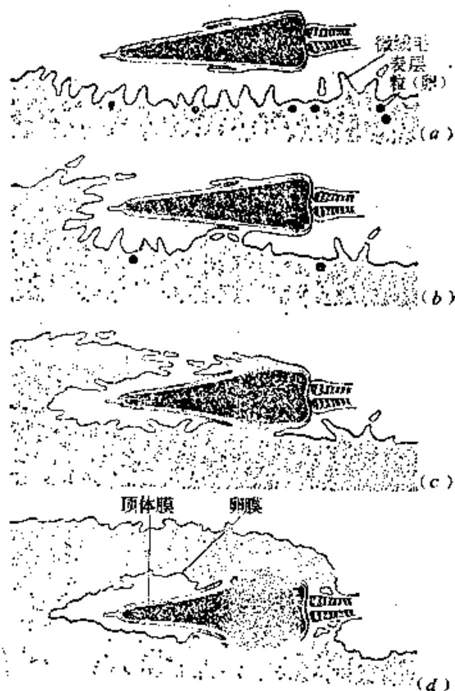



图9-1 精子与卵子融合过程

摩尔根在《基因学说》中指出："基因之所以稳定，是因为它代表着一个有机的化学实体。"在揭示基因的本质过程中，奥地利理论物理学家量子力学创始人之一薛定格作出了不可磨灭的贡献。1944年他在《生命是什么?》一书中认为，基因在构造上只含有少数几种原子，但具有按一定规则极有规律地起作用的特性，而且具有奇迹般的持久性和连续性。他从物理学的角度认为应该用分子模型来描述基因。具有密码缩影的基因是生物生长的蓝图，并具有一对一的关系，而生物体具有实施这种蓝图的手段。

同年，格里弗斯（Griffith）等人以充分的证据证了基因物质是一种核酸，是DNA的一个片段，是贮存特定遗传信息的功能单位。

### 9.1.3 DNA的空间构型

DNA由两条多核苷酸链组成。两条链彼此平行，并通过A—T和G—C间的氢键作用，以右螺旋的方式卷绕在一起，绕一个中心轴盘旋形成螺旋梯状双螺旋分子结构。图9-2是DNA双螺旋结构的示意图。这一结构模型的提出被誉为20世纪以来最伟大的发现，从而创立了分子生物学。模型的提出人，美国科学家华特生和英国科学家克里克因此获得1962年诺贝尔奖。

### 9.1.4 DNA半保留复制

华特生和克里克提出DNA模型时，就强调了这个双螺旋模型可以很好地说明DNA分子的自我复制。DNA复制的机制是组成双螺旋结构的两条链要解旋和分开，并且分别作为

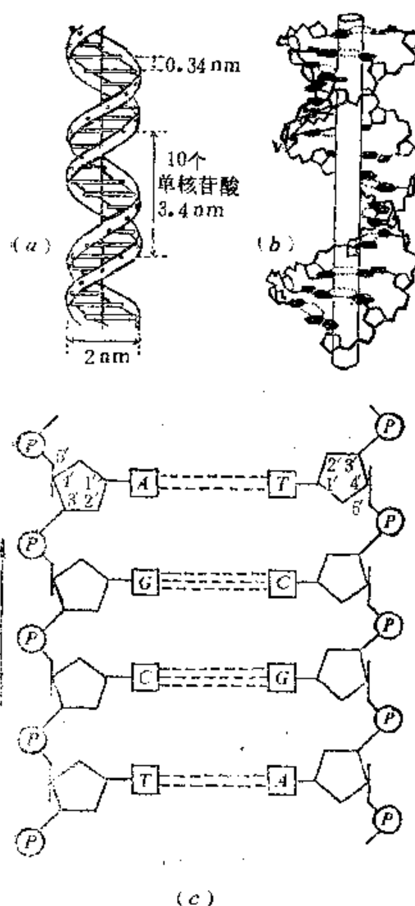



图9-2 DNA双螺旋结构

模板合成出新的DNA链。母链与新链碱基互相配对，产生与亲代相同的两条DNA分子。如

—CGTA—

—GCAT—

两条分子链，成为

—CGTA—和—GCAT—

按碱基配对原则，新合成的二个DNA分子为

$$\begin{matrix} —CGTA— \\ —GCAT— \end{matrix} \quad 和 \quad \begin{matrix} —GCAT— \\ —CGTA— \end{matrix}$$

它们与原来DNA分子的碱基顺序完全一样，每个DNA分子中一条链是亲代的，另一条链是新合成的，因此人们就把这种复制方式称为半保留复制。这样的复制的特点是亲代可以把与自己在质量和数量上完全相同的DNA分子传递给子细胞，也就是把全套遗传信息都传递给子细胞。

图9-3 是DNA的半保留复制示意。

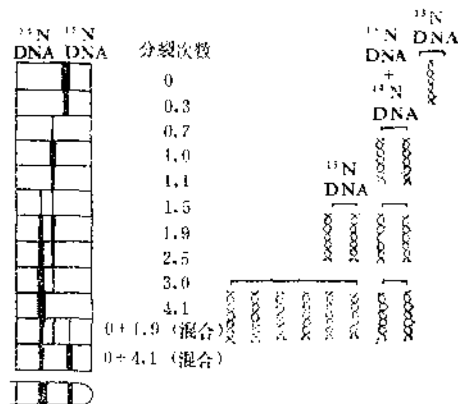



图9-3 DNA的半保留复制

DNA复制过程符合通向混沌的倍周期规律

$$N = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{9-1}$$

式中$N$是在某复制阶段$n$时，DNA的数目，即图9-3中分叉数目；$n$称为复制级数或分叉级数。容易看出，DNA的复制过程与康托尔集的形成过程相类似，所以其分维$D_f=0.6309$。

事实上，亲代通过基因复制把自身所具有的功能和信息传递给子代。从功能和信息分形的观点看，DNA是一个分形体，体系内部包含多个层次。复制过程是信息和功能的延伸和再现。在这里，功能分形是指体系的一个相对独立部分的功能与整体的功能相似。在适宜的条件下，一个相对独立的部分能够发育成长为功能具全的整体。信息分形则更为广泛，是指体系的局部具有整体的主要信息。从基因复制过程的分叉树或分形树可以看出具有很好的自相似性，任取一独立的小枝都具有与整体相似的构型和信息。

研究表明，基因是DNA分子长链中的一个片段，基因由许多对核苷酸组成。而在一个基因区段里，还可以划分出若干个更小的亚单位。亚单位具有一定的独立性。可见DNA内部还有多个层次存在。因此具备有复杂的自我复制、重组、突变和信息传递等功能，这正是分形体的奇特所在，也是生物体具有分形性的原因所在。

## §9.2 生命的功能单元

生物界繁衍生长，欣欣向荣，各具异形，多姿多彩，人们难以抓住其共性，经过漫长的岁月，才逐步认识到，细胞既是生物体的结构单元，又是功能单元。

单细胞生物只有一个细胞，高等生物则由亿万个细胞组

成，然而最基本的单元都是细胞；生物体的一切重要的生命活动，如繁殖、发育、生长、遗传和变异等，都是以细胞为单元来实现的。在多细胞生物体中，细胞的结构和功能虽然发生分化，但彼此之间互相联系和制约，组成一个有机整体；同时多细胞生物的各个细胞又具有相对独立性，各自有一套自我控制系统，具有全能性。

图9-4是各种形态的细胞显微像。

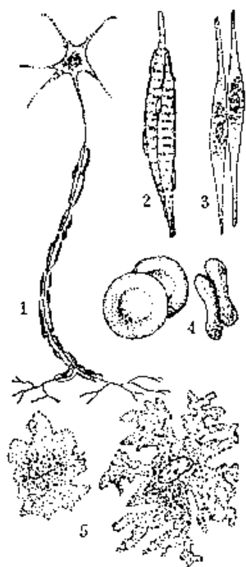


图9-4 细胞显微像

### 9.2.1 细胞来自细胞

细胞学说是19世纪初由德国植物学家施莱登（J Schleiden）和动物学家施旺（T Schwann）提出来的。但他们没有能说明细胞是从何而来的。到19世纪中期，人们才发现，新细胞是通过细胞分裂，从以前存在的细胞复制出来的。1855年维尔荷（R Virchow）指出："什么地方存在细胞，什么地方就必定存在前驱细胞，恰如动物只能来自动物，植物只能来自植物一样。"也就是说，细胞来自细胞。从此，细胞学说真正确立起来，恩格斯在《自然辨证法》一书中，对细胞学说的建立作了高度的评价，称誉它是19世纪自然科学的重大发现之一。

### 9.2.2 细胞分裂

细胞一般是很小的，是肉眼看不见的微观颗粒，已知最小的细胞是枝原体，真直径只有0.1～0.2μm，而大的细胞肉眼可以看见，如鸟类的蛋和植物纤维。但鸟类蛋的蛋黄才是细胞，而附在蛋黄上的小白点则是受精卵，蛋白是提供受精卵发育的营养物质。举个例子，鸵鸟蛋蛋黄直径可达5cm，而植物纤维可长达1m。

生物体如何长大呢？是增大细胞体积，还是增加细胞的数目？已知在所有生物中，绝大多数细胞的大小是相近的，因此生物体的长大主要是由于细胞数目增多。一个细胞分裂为两个细胞，两个细胞分裂为四个细胞，细胞的这样增殖方式称为有丝分裂过程。所产生的子细胞，在结构和功能上都与原来的母细胞是一致的。多细胞生物体的细胞数目与生物体的大小成比例。对人类，一个婴儿约有$10^{12}$个细胞，一个成人约有$10^{15}$个细胞。这里我们看到，细胞的分裂正是生物体分形的基础。

### 9.2.3 细胞的全能性

细胞全能性是指单个分化细胞在适宜的条件下表达全部遗传信息，并发育成为完好无缺的和充分分化的有机体的能力。

早在1838年施莱登在《关于植物发生》一书中就指出：植物，不论发展到多么高级，都是由充分个体化的、各自独立的、分离的细胞组成的聚合体。而“每个细胞都有双重生命，一个是独立自主的，只和自己的发育有关；另一个则

是作为一株植物为保持其完整性所需要的部分，是比较次要的。”次年，施旺在《关于动植物在结构和生长中的相似性的显微研究》的论文中进一步明确指出：“细胞是有机体”，表达了细胞全能性的概念。

1902年，德国植物家哈勃兰特(G Haberlandt)讨论了通过组织培养证明植物细胞再生出完整植物的可能性，第一次明确提出植物细胞全能性学说。1958年美国生物学家斯迪沃德(S Steward)用胡萝卜的单个体细胞和小细胞团在离体组织培养时得到新植株。这一成功吸引了众多探索者，现已有200多种植物在组织培养中诱导分化成植株。植物细胞的全能性学说得到实验的证实。

但动物细胞是否也具有全能性，这未能作出肯定的回答。然而已经有若干肯定的实验报告公布出来。人类的一个受精卵在母体内发育成一个人。这已成为常识。这里重要的结论是受精卵蕴含着发育成为完整人的全部信息。进一步的研究工作是通过假定器官图谱，搞清受精卵上存在的发育为整体的各器官的区域，这种定位区域随着胚胎的不同发育程度而具有不同的清晰度。1968年美国生物学家戈登(Gurdon)将青蛙肠上皮细胞核移植到去核的受精卵中。结果发育成一只正常的青蛙。瑞士斯米德(Schmid)等人所做的小型水母的实验也得到十分有意义的结果。他们从水母的伞上取一小片横纹肌，实验中注意到保证没有其它组织的细胞混入，实验在22°C下进行离体培养。经7日后，形成垂管，即水母的性和摄食器官。从横纹肌再生出来的垂管，几乎含有构成水母的所有类型的细胞，而且各类细胞的排列井然有序。这个实验结果表明，横纹肌细胞具有同受精卵相似

的发育能力。根据分形的定义，细胞的全能性就是分形性。生物体由细胞构成，在这里与分形体（生物体）由分形元（细胞）构造是等价的。

## §9.3 生命活动基础的分形性

在广漠的宇宙空间，生命现象是最奇妙最神秘的领域，恩格斯说："生命是蛋白质的存在形式。"生命的新阵代谢和自我复制是依靠蛋白质的辅助为基础的，由于蛋白质在生命过程中起着异乎寻常的作用，所以，从19世纪中期以来，人们对蛋白质的探索始终没有停止；近年来，对蛋白质的分形性质的研究正生气勃勃，方兴未艾。

### 9.3.1 蛋白质的结构特征

蛋白质是由各种$\alpha$-氨基酸通过酰胺键联成的长链分子，称为肽链，如图2.4所示，链中相当于氨基酸的单元结构称为残基。蛋白质的结构有层次之分，即一级结构，二级结构、三级结构和四级结构。级结构是肽链中氨基酸的排列顺序。一级结构称之为分形元，在很大程度上决定着高级结构。蛋白质的构象分为$\alpha$-螺旋、$\beta$-折迭、$\beta$-转角和无规卷曲等单元，及各种微区域、亚单位等结构单元。而蛋白质表面极不规则，布满各种空洞和缝隙。可见蛋白质的结构十分复杂奇异，经典数学方法在这里无能为力，作用受限。近年来的研究表明，蛋白质的分子链和表面具有分形特征。

### 9.3.2 蛋白质的分维

蛋白质分子链是一条曲曲弯弯的曲线，若对其中任意一段进行放大，则会看到与整体曲线具有同样复杂的曲曲弯弯的一条曲线。这是由蛋白质自身的复杂性所决定的。即在一定标度范围内具有统计自相似性。

把分子链的统计长度记为$R$，若残基数为$N$，则有标度关系

$$R \propto N^{1/D_f} \tag{9-2}$$

式中$D_f$为分子链分维，这是弗洛里发现的关系，当时把$1/D_f$定义为$\gamma$，并求得3维情况下的$\gamma = 3/5$。而且许多学者进行数值模拟和实验测定的结果，都肯定式(9-2)的正确性。

我们已介绍了NRW模型和SAW模型。蛋白质分子链构像与普通无规行走的轨迹不同。形成分子链的原子在空间占有一定的体积，已被某一原子占领的空间就不能再容纳别的原子，即所谓体积排斥效应。就相当于无规行走的粒子有"记忆力"，已经走过的路径不再重复行走。显然，这种无规行走正是自回避行走，所以模拟计算中采用SAW模型。

SAW表现出十分明显的空间维数($d$)依赖关系，已在第八章给出

$$D_f = (d+2)/3$$

表9-1是蛋白质的链分维值。

1987年，我国学者罗辽复等人发表对核酸分维的研究结果，发现分维与分子进化有一定关系，其规律是分维值随着分子进化水平有明显的增大趋势。例如线粒体分维约为1.2，

表9-1 蛋白质分子链的分维

| 蛋白质 | $D_f$ | 蛋白质 | $D_f$ |
|---|---|---|---|
| 细胞色素$C_2$ | 1.69 | 胰蛋白酶 | 1.48 |
| 细胞色素$C_{551}$ | 1.61 | α-胰凝乳蛋白酶 | 1.44 |
| 细胞色素$C_{551}$ | 1.41 | 前清蛋白 | 1.25 |
| 细胞色素$B_5$ | 1.46 | 碳酸酐酶C | 1.45 |
| 血红蛋白($\alpha/\beta$) | 1.50 | 溶菌酶$T_4$ | 1.67 |
| 肌红蛋白 | 1.54 | 磷酸甘油酸激酶 | 1.69 |
| 过氧化歧化酶 | 1.32 | 羧肽酶A | 1.53 |
| 铁氧还原蛋白 | 1.41 | 醇脱氢酶 | 1.70 |
| 豆血红蛋白 | 1.49 | 己糖激酶 | 1.81 |

病毒及其宿主——原核和真核的分维约为1.4~1.5，哺乳类及免疫球蛋白分维约为1.7。这预示着分维可能成为表征生物进化的一个有用的指数。

在对含铁蛋白质的拉曼电子自旋弛豫实验中，美国伊利诺斯大学斯达普尔顿(J Stapleten)于1980年发现弛豫时间$T_1$与温度$T$(4~15K)有如下关系

$$1/T_1 \propto T^{(3+2\tilde{D})} \qquad (9\text{-}3)$$

以色列霍伯鲁大学亚历山大(S Alexander)和美国加利福尼亚大学奥巴赫(R Orbach)指出这里$\tilde{D}$为分子链的分形子维数，是因分子链的低频振荡所致。表9-2是分形子维数与链分维的比较。

蛋白质表面是极不规则的，布满各种空洞、折皱、缝隙和山丘。图9-5是随机分形，可用于蛋白质表面的模拟。分维的测定有两种方法。一种方法是根据蛋白质表面$S$与探针

表9-2　分形子维与链分维

| 蛋　白　质 | $D_f$ | $\tilde{D}$ |
|---|---|---|
| 肌红蛋白·$H_2O$ | 1.54 | 1.61 |
| 细胞色素C | 1.59 | 1.67 |
| 细胞色素$C_{551}$ | 1.42 | 1.43 |
| 铁氧还原蛋白 | 1.41 | 1.34 |

分子的横截面积$\sigma$之间的标度关系

$$S \propto \sigma^{(2-D_f)/2} \tag{9-4}$$

来测定。这里$S$是可及面积，由残基数计算而得，$\sigma$是标度变换。1985年，刘易斯(M Lewis)和里斯(C Rees)用此

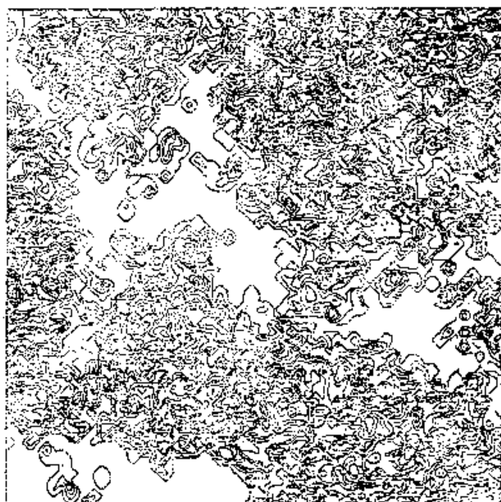


图9-5　随机分形

法测定了溶菌酶、核糖核酸酶A和过氧化歧化酶在0.1～0.35nm标度范围内的表面分维，得$D_f \approx 2.40$。另一种方法是先测量表面边界分维$D_b$，然后通过曲线平移形成曲面的原理，得到表面分维为

$$D_f = D_b + 1 \qquad (9\text{-}5)$$

以色列普菲弗（P Pfeifer）等人用此法测定了水痘溶菌酶，细胞色素$C_5$，细菌丝氨酸蛋白酶A及核蛋白$L_7/L_{12}$在0.15～2.05nm标度范围内的表面分维值分别为2.118，2.117，2.088和2.132。蛋白质表面分维的测定，支持了1983年普菲弗提出的介于2与3之间的非整数维化学的概念。

## §9.4 生物分形概要

各种生物体在不同层次上都表现出分形性质。如基因、生物大分子和细胞，都显示出分形元的特点，这是分形体系的精细结构，是较初级的分形元。当仔细观察组织、器官时，可以发现在这个层次上也明显地表现出分形性。图9-6是人体的消化系统的分形特点。

### 9.4.1 无标度区

生物分形同样有存在的范围问题，即无标度区问题。无标度区的上限可以是生物体的整体，即从整体的外表就能够直接地看到某些自相似性的存在。而无标度区的下限尚无公认结论，许多学者认为基因应是下限。由于分形生物学是近年来提出来的新分支学科，有许多问题还是不成熟的，同

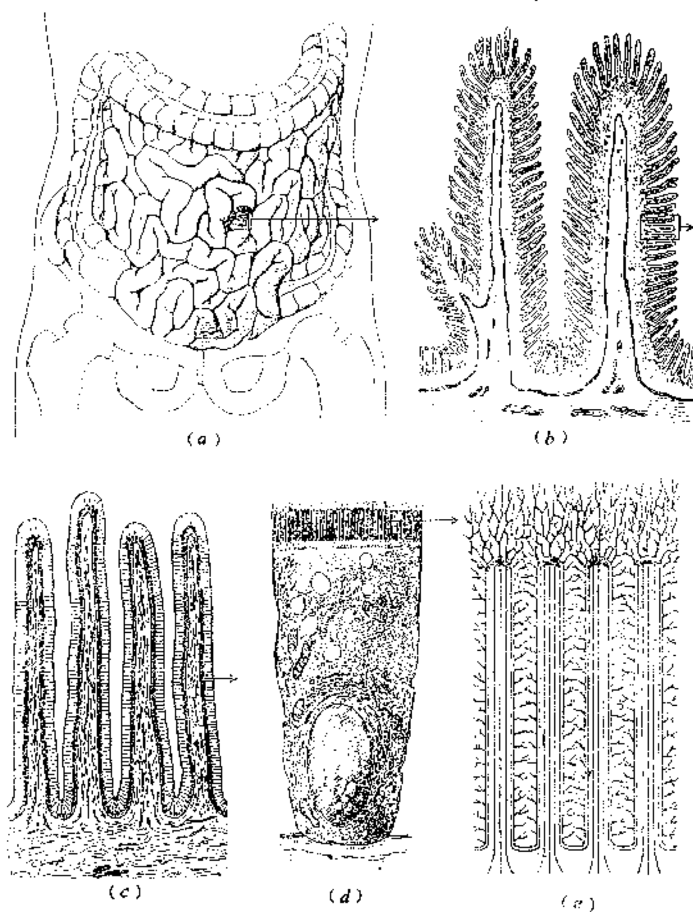



图9-6　人体消化系统的分形特点

时，生物体又是最为复杂的体系，深入研究有待继续进行。

### 9.4.2 生物分形元

分形生物学是研究生物分形原理和应用的新分支学科。生物体中具有分形特性的相对独立的部分称为生物分形元(*Biological Fractal Unit*,BFU)。所谓相对独立的部分是指在结构上和功能上有相对的内部完整性，并与其周围的部分有着相对明确边界的局部。例如一支树枝，一粒花生，一个白薯，都是BFU。细胞是最典型的BFU。生物分形元必须具有分形特性，蕴含着生物整体的基本信息和功能，所以生物分形元是生物体整体的缩影和显现。

### 9.4.3 生物全息律

70年代末，张颖清在研究生物的整体与其相对独立部分之间的相关性时，发现生物体的组成部分与生物整体在生物学特性上是相似的。他提出的生物全息律概念，实际上是分形生物学的重要组成部分。虽然他没有用分形的语言来表达，但事实上发展了分形理论。这里的“全息”是借鉴于光学中的全息概念。在全息摄影中，全息照片记录下位移和相位两方面的信息。事后，即使全息照片撕成小片，若对每一小片还原到原来的波长和相位，仍能给出原来的整体图像，从分形的观点看，全息照片的每一部分都贮存着整体的全部信息，是整体信息的缩影，这与细胞的全能性是相类似的。

从分形的观点看，生物学中有两个重要问题一直没有引起重视而被忽略掉。第一个问题是忽略了介于整体与细胞之间的中间层次（分形论中称为分形元）的研究；第二个问题是忽略了细胞在亲体本体上向着新整体自发发育的事实。

例如白菜在自然贮存条件下，在植株基部常常长出小植株。可见，体细胞的全能性不一定非要在离体培养的条件下或在核移植时才得到体现；体细胞的全能性在植物、动物的个体本体上也能得到体现。体细胞在动植物个体本体天然培养基中的自立发育，生动地表明，生物分形元与整体具有自相似性，是整体的缩影。

### 9.4.4 分形外显性

生物体的生物分形元发育成新整体的外在显现称为分形外显性。植物的分形外显性的许多实例都是我们所熟知的，如压条、扦插和分株等方法繁殖新植株，就是分形外显性的典型应用实例。这些方法中压入土中的枝条、插条和根部滋生的蘖芽分别是分形元，在一定的湿度和温度等条件下，形成独立的新植株。新植株的形成过程分形元与主体发生隔离，摆脱整体对分形元的抑制作用，沿着自己的发育道路生长，最终成为完整的新植株。嫁接是以天然的异体为培养基，使接穗或芽，即分形元发育成为新植株。

自然界中最普遍最一般的分形外显性的表现形式是以天然的亲体本体为培养基的。生物分形元甚至成为小植株。例如草莓通过匍匐茎把小植株（分形元）相连接。

分形外显性在动物中也同样存在。从最低等的原生动物到最高等的脊索动物，都可看到分形外显性。

### 9.4.5 圆形自相似

生物体的某些构型有着明显的自相似性。蛋白质和DNA等生物大分子的空间构型是螺旋结构。在细胞层次上，细胞

骨架结构的微管为螺旋状。由微管组成的纤毛，中心体及植物的输导管，管胞也是螺旋状结构。生物体的外表，如植物的藤、萝；蜗牛的螺壳、反刍动物的角和人的指纹；病毒中的流感病毒、腮腺炎病毒等，都是螺旋形的。螺旋是圆的连续形态。细胞的形状是近似球形的多面体结构，生物体是多层次圆形结构的复合体。人和动物的卵、胚胎、血管、五官、躯干等都属于趋圆结构。甚至圆形自相似也在病变中反映出来，如各种脓肿，丘疹、斑癣和鸡眼等，反映了病理的圆形损伤。总之，生物的圆形自相似是不容置疑的，值得深入研究的现象。

## §9.5 生物分形的论据

伟大的生物学家达尔文1809年诞生在一个富裕的乡村医生的家中。少年时代不喜欢学校的课程，把时光消磨在采集岩石、打猎、捕捉动物、射击和阅读生物学和地质学等自然史方面的书上。他父亲先叫他学医，但有一次，他看见医生为一个小女孩施行外科手术时，鲜血淋漓，加上那时没有麻醉药，小女孩痛哭不止，令人心碎。从此他厌恶学医，毅然离开了医学院。他特别喜欢昆虫和鸟类，从中获得巨大的乐趣。后来他进了剑桥大学，学业仍无显著长进。他的老师植物学家亨斯娄（Henslow）把他推荐给一位军官费茨-罗爱（Fitz-Roy），作为青年自然科学家登上英国政府派出的探险舰贝格尔号(Beagle）作环球探险旅行。那时达尔文22岁，在贝格尔号上是一名不拿薪水的自然科学家。他对此次旅行十分感兴趣，表现出巨大的决心和信心，全力以赴。事

实上，此次探险旅行使他成就为一名伟大的进化论学者。

探险舰自1831年启航，1836年返回英国，历经5年之久。搜集了大量学术、经济和航海等资料。而对达尔文来说，五年的旅行使他头脑里充满了生物进化的思想。他写道："在南美洲有三类事实，在我的头脑中发生极深刻的印象，第一，愈自北往南行愈觉得许多邻近的物种彼此连续，彼此交替；第二，南美洲沿岸各岛屿上的物种与大陆上固有的物种都存在亲缘关系，此事实使我大受感动；第三，使我最感动的是现存贫齿类和啮齿类与古代灭绝的同种有密切的关联。有一次，在鉴定一只大犰狳的零碎化石时，发现它的相貌与现代的犰狳相似。这种非预料中的收获使我永远不会忘记。"他的惊人的发现是来自格拉帕哥斯群岛，该岛位于厄瓜多尔以西650英里的太平洋中，他在那儿停留了五周，最吸引他注意的是岛上地雀的多样性，共有14种地雀，其体型和喙的形状有很大分化。这些特殊的雀类在世界其他地区并不存在，但与南美的一个种类非常相似。他认为，最合理的解释是它们都是大陆雀类的后代，由于长期与大陆隔离生活在岛上，生活习性和觅食方式发生变化，形成不同的体型和喙的多种形式。

达尔文在格拉帕哥斯的发现对相关变异作出了重大贡献，但只是研究了个别部位的相关变异，没有得出生物体相关部位的一般规律。分形论将在生化、生理、病理和遗传等生物学特性上的相关性进行论述，是对达尔文理论的充实。

### 9.5.1 生化与植物药用选择

根据生物分形原理，生物分形元在某种意义上是生物整

体的缩影。因此，分形元上某一部位与整体的映射部位在生物化学组成上的相似程度比非映射部位要大。图9-7是映射部位对应相似的示意。图中$h$，$i$，$j$，$k$为发育程度不同的生物分形元，其对应部位，$A_h$，$A_i$，$A_j$和$A_k$之间，$B_h$，$B_i$，$B_j$和$B_k$之间为映射部位，因而在生物学特性上具有更大程度的相似性。

张颖清等人的研究工作表明，高粱上部叶中氰酸的含量较高，下部叶中氰酸含量较低。在同一叶中，叶上部氰酸含量较高，叶下部的鞘中氰酸的含量最低（见表9-3）。

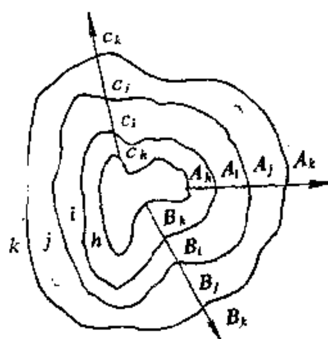


图9-7　映射部位对应相似示意

生物分形对植物的药用部位的选择具有指导意义。人参是一种重要的中药材，因为其根部含有具有生理活性的人参皂甙。实验表明，在人参的花、果、叶和茎中，均

表9-3　高粱的氰酸分布

| 植株不同部位 | 最上部叶 | 最下部叶 |
|---|---|---|
| 氰酸含量 | 18.6 | 7.3 |
| 叶的不同部位 | 叶上部 | 叶　　鞘 |
| 氰酸含量 | 18.6 | 3.6 |

含有与根相同的人参皂甙，而含量比根高！人参植株中各部位人参皂甙含量按如下次序递减：花＞芽＞茎＞叶＞根。可见药用人参根的传统观念受到了挑战，从而将大大扩充珍贵药材的来源。

黄柏树皮是一种中药，但已发现，黄柏的根皮药效更好。其原因是根皮含小檗碱成份比树皮高。这类例子很多，在对2000多种根茎叶类药材进行研究的结果表明，传统药用部位不是最佳者占约50％。事实说明，应用生物分形原理可以有效地扩大植物药用的选择范围，为提高治疗效果提供新途经。

### 9.5.2 生理学

对应部位相似关系在植物生物学上的表现是很明显的，水稻的开花次序是全株最上部的枝梗先开花，最下部的最后开花。一枝小穗也是最上部的先开花，最下部的最后开花。棉花与此相反，在全株的最下部先开花，最上部的后开花。这样的开花次序也表现在同一枝上，最下部的先开花，最上部的最后开花。如图9-8所示。棉花的落蕾铃率自上部向下递减，某一分枝也是如此，自上而下递减。表9-4是棉花落蕾铃率比较。

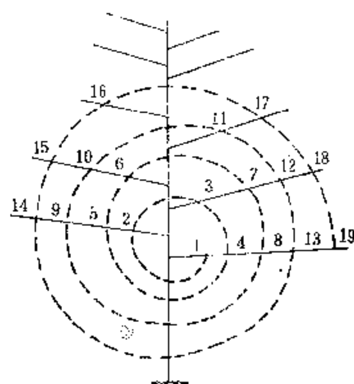



图9-8　棉花开花次序

表9-4 棉花落蕾铃率比较

| 植株不同部位的落蕾铃率% | 上部(11～15)枝 | 中部(6—10)枝 | 下部(1～5)枝 |
|---|---|---|---|
| | 64.2 | 60.6 | 49.5 |
| 同一枝不同部位的落蕾铃率% | 上部第5果节 | 中部第3果节 | 下部第1果节 |
| | 95.6 | 80.0 | 67.2 |

### 9.5.3 遗传与定域选种

先来看两个实例。玉米结籽区在植株的中下部。根据分形原理，选取玉米穗中下部的玉米籽作种子，比其他部位的产量高。张颖清的实验结果是穗轴中下部的籽粒作种子比上部的可增产35.47%。

高粱的果穗长在植株顶部。果穗是高粱整体的缩影。果穗的上部籽粒早熟饱满，具有好的遗传优势，所以选用果穗上部的籽粒作种子比用中部和基部的增产分别为6.5%和15%。

此外，在定域选扦条，定域选外植体，定域选芽等都具有实际优势。

究其原因，并不难于理解。在同一多细胞生物体内，尽管不同部位的细胞具有相同的基因，但基因的活性有差别。当选取具有高活性基因的细胞群或组织（种子、芽和外植体等）去繁殖后代时，与其他部位相比较，其发育和活化程度都处于优势，产生优良的遗传效果。因为这种遗传效果具有分形性质，所以称为遗传分形性。

### 9.5.4 形态学

生物的形态多姿多彩，仪表万千，是经历长期的进化和复杂的因素造就的。根据生物分形原理，生物体自身的分形性在外表是有显露的。

纵观众多的植物，若植株的叶生于株顶或分枝的叶生于枝顶，而植株的下部或枝的下部无叶或少叶，则相对应地叶的上部应有较多的叶物质，叶上部较宽，下部较窄，使叶成为倒卵形、倒披针形或倒三角形等。例如菱叶海桐、玉兰和海南紫荆木等。若叶在全株上部较少或较小，则叶成为卵形，披针形或心形等，例如甘青虎耳草，千花葵、扶桑和彩叶草等。

果也可以是生物分形元。若花在全株上部，结果于株顶或枝顶，则果物质在果上端分布较多，果实为倒卵形，倒如鸭梨，番木瓜和无花果等。若果主要结干枝的中部，在枝上部急剧减少，则果物质在果的上端也急剧减少，因而果实成为尖嘴形的，例如桃。

比较而言，动物的形态分形不如植物明显，还需深入探索研究，以发现其深层的规律。

## §9.6 穴位群的实质

中华传统医学历史悠久，但至今仍有不少医治方法带有神秘色彩。例如对针灸学的神秘感就是众所周知的事，其所以产生神秘感，实际上是对穴位群缺少认识的缘故。

根据生物分形原理，穴位是人体某一部位在分形元上的

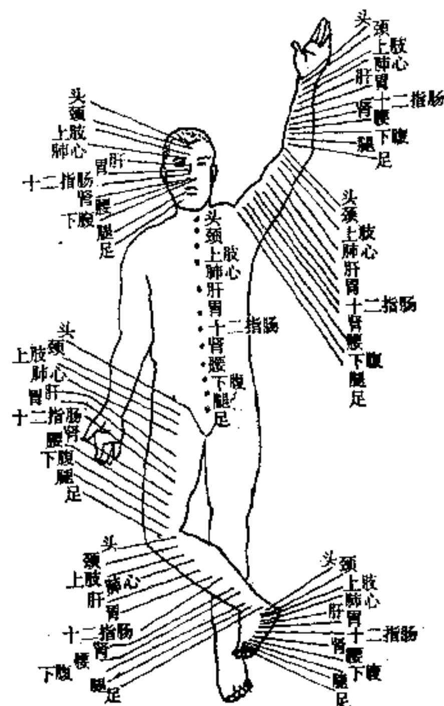



图9-9 人体分形

反映。一个穴位群则是人体的缩影，是一个分形元。例如头、足、耳、鼻和舌都是分形元，是人体的缩影（图9-9）。美国医生斯克德（U Schjelderup）也发现人体的分形现象。他指出，人体的器官和功能会在某一部位的体表反映出来，整个机体好象被缩小到这一部位上。因此，可以由此来诊治疾病。同时，根据分形论的对应相似原理，容易理解下面的事实：当人体的某一器官或部位有病时，就必然要在相

对应的穴位上表现出来，在穴位上产生对痛刺激敏感，皮肤电阻降低等病理生理反映。因此，对特定的穴位施加刺激，如针灸或按摩等疗法，就会产生治疗效果。这就是病理分形性。这里根据生物分形原理，对针灸和按摩作出了合理的分析。

早在2500年前我国就通过耳部来诊治全身各部位的疾病。约在2500年前成书的《灵枢》中写道："十二经脉三百六十五络，其气血皆上于面而走空窍"，"耳者，宗脉之所聚也。"图9-10（$a$）是我国的耳穴图。是中医学家长期经验的总结。耳穴在功能和信息上是人体的缩影。耳轮廓线似胎儿形也是令人回味无穷的。耳穴位与人体各部位的相关性已得

（$a$）　　　　（$b$）

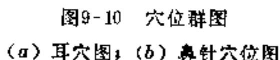


图9-10　穴位群图

（$a$）耳穴图；（$b$）鼻针穴位图

到我国和世界各国学者的认同和证明。1957年法国诺吉尔（P Nogier）在中国医学的启发下提出了较精细的耳部穴

位定位图。

除耳针穴位群外，还有鼻针穴位系统，足针穴位系统，第二掌骨穴位系统和舌穴位群等。图9-10(b)是鼻针穴位图。

经络是我国春秋战国时期所发现的同类穴位连续有序分布的规律走向。穴位分形与经络走向是相互联系的。前者认为部分反映整体各部位的信息，后者研究穴位的分布和联系。因此，中医学认为，由局部可以诊治整体各部位的疾病。可以说，中医学在认识人体时，一直受到分形思想和经络学说的支配。

## §9.7 癌变的新认识

癌变已成为人类最可怕的疾病之一。在癌的威胁面前，全世界的医学界都为之进行艰苦的探索研究，以期征服人类的厄运。但由于对癌变机制没有得到合理的论述，所以也就没有找到有效的治疗和预防方法。

近年来，随着分形论的逐步确立，人们开始应用DLA模型和KCA模型来模拟癌细胞的扩散凝聚，其结果表明，肿瘤和癌变貌似复杂的体系，其实是由简单的递推公式不断重复计算的结果。人们期望通过大量的模拟计算和深入分析能找到癌变的机制，并通过某种调节控制机制，使癌变得到制服。新近的研究报告表明，有不少癌患者不治自愈，据信这是由于体内自组织效应起作用，通过自调节自控制机制使癌变越过癌区向正常化发育。据此，已试制成功癌治疗装置，通过电刺激促使调控机制产生作用，以达到治疗效果。

### 9.7.1 癌变与胚胎发育

人的胚胎自受精卵发育开始，经过卵裂期、桑椹期、囊胚期、原肠胚期、神经胚期和器官建成等阶段发育成胎儿。在卵裂期和桑椹期，细胞处于无分化状态。细胞分裂快，大小不一，边界模糊，密集成团。这些特点，与癌变特点一样。所以，在时间轴上的卵裂期和桑椹期称为癌变区。胚胎继续往前发育，穿过癌变区，达到囊胚期以上阶段，细胞开始分化向胎儿发育。

癌细胞和正常细胞的主要区别在于前者的发育几乎停止（称为滞育），而分裂的速度却异常之快，不规则，不协调，模模糊糊，混乱一团。实际研究早就发现癌细胞及其扩散形成的整体酷似螃蟹，即分叉结构。在癌变区是一个混沌区域，存在着类似奇异吸引子的癌变分形元。癌变分形元是滞育在卵裂期或桑椹期发育阶段的生物分形元。

张颖清根据胚胎的发育进程，认为癌变细胞只要穿过时间轴上的癌变区，就进入正常发育阶段。这一对癌变的新认识的重大意义在于可能导致产生征服癌变的新战略。即促使癌细胞的分化和发育，越过滞育期进入正常发育阶段。

### 9.7.2 实验证据

早在50年代，麦金奈尔(G Mckinnell)和金(T King)把青蛙癌的细胞植入去核卵中，最终居然发育成一只正常的蝌蚪，可见癌细胞仍具有全能性。另一重要实验是取自黑棕色小鼠的癌细胞注入到白色小鼠的囊胚中，然后把此囊胚植入假孕的母鼠子宫中，结果得到黑棕与白毛相间的小鼠，

出现细胞遗传性镶嵌体。显然是由于癌细胞在具有强烈发育能力的囊胚环境条件下向前发育，进入正常化的发育阶段，于是一个新个体便在癌细胞的参与下建成了！

从促使癌细胞分化和正常发育的观点出发，某些外在因素，也可能促使癌细胞向正常细胞转化。一位面部肉瘤患者，持续高烧数天后，肉瘤竟奇迹般地消失了。日本医生对54例进行性癌患者进行全身热治疗，在可评价的44人中，10例肿瘤缩小，3例肿瘤消失。这是一种物理疗法，在一定的物理条件下通过自调节自控制，使癌细胞转化为正常细胞。化学疗法是另一重要方法，即提供诱导分化、再生和修复的药物，促使癌细胞正常化。中药仙鹤草、白毛藤和败酱根等含有丰富的分化诱导物质，具有抗癌作用，植物激素和植物生长调节物质，如半枝莲醛、脱落酸和细胞激动素等，也应有抗癌作用。水果和蔬菜中也有丰富的分化诱导物质，如西瓜、黄瓜、草莓、山楂、胡萝卜、韭菜和萝卜等。动物类，如鱼、海参、贝类和虾等再生能力强的可食动物，有抗癌和防癌功效。激素药物，如甲状腺素、雌激素、糖皮质激素、孕酮和蜕皮激素等有促使分化发育和诱导滞育分形元正常发育的作用，是好的抗癌药物。

根据对癌变机制的新认识，提出了征服癌变的新战略，但还要经过艰苦的再探索和广泛深入的实践证明。在人类的这一重大战役中，分形论将作出应有的贡献。

## §9.8 生物的统一性与人体发育的相似性

### 9.8.1 生物的统一性

利用生物化学方法，对所有生物类群的生命物质进行分析发现，一切生物体内的化学元素基本上是一致的。动植物体内都含有葡萄糖；构成生物体蛋白质的氨基酸都是$L$-型的；各种生物体内的核酸结构相似，而构成核酸的碱基则完全一致，由碱基构成的遗传密码各种生物类群是一致的。

世界上现存的生物，无论是结构简单还是复杂的，无论是原核生物还是真核生物，其细胞代谢过程基本上相似。在能量转化中，所有的生命都利用ATP类物质。它们的细胞以相似的途径合成和储存相似的化合物：脂肪、糖和蛋白质。在绝大多数的细胞中，所贮存的化合物以相似的方式分解和释放出能量；所有生物细胞的生化反应都有生物酶作为催化剂进行催化反应。

各生物类群之间，显然存在相异性，各生物类群有自己的起源，有自己的祖先，有自己的系统发育历史。但上面以无可辨驳的实事表明，生物界有着共同的起源，生物具有统一性。

### 9.8.2 精子的发生过程

对后生动物类群，精子的发生和形成过程基本相似，都

是雄性生殖腺中发生的。高等雄性动物性成熟时，产生精子。图9-11以哺乳动物为例，示意精子的发生过程。显然是一个似分叉树的发生过程。

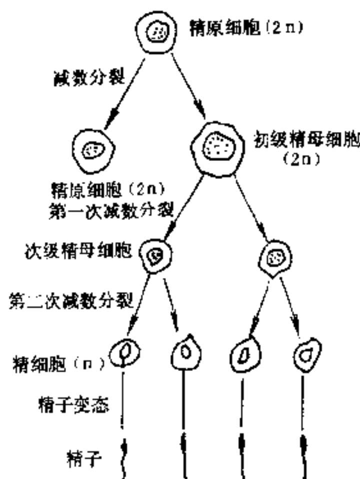



图9-11 精子的发生过程

### 9.8.3 胚胎的发育

德国博物学家赫克尔(H Haeckel)根据动物形态学和胚胎学的研究，提出生物重演律，认为生物在个体发育过程中，有重现其祖先的主要发育阶段的规律。在理解这个规律时，应注意到个体胚胎发育时间短促，个体发育不能完全重复祖先的系统发育，只能是简单而又迅速地重演祖先的系统发育。在很短的演变过程中，总是重复出现低等生物的特征。这是人类发育过程中，在时间轴上的分形现象，是时间分形的例子。在高等生物的胚胎发育过程中，性状的出现是

有一定顺序性。一般是在胚胎发育开始后，先出现门的性状。性状分化的过程，反映出生物重演过程。

从图9-12可以看出，蝾螈、鸡、猪和人的早期胚胎的发育阶段相似，都有鳃裂和尾，头部较大，身体弯曲，在时间轴上越早期，体形越相似，以后逐渐分化。胚胎发育阶段反映了这四种动物具有相似性，适应水中生活，表明脊椎动物的祖先都经过水栖生活阶段。

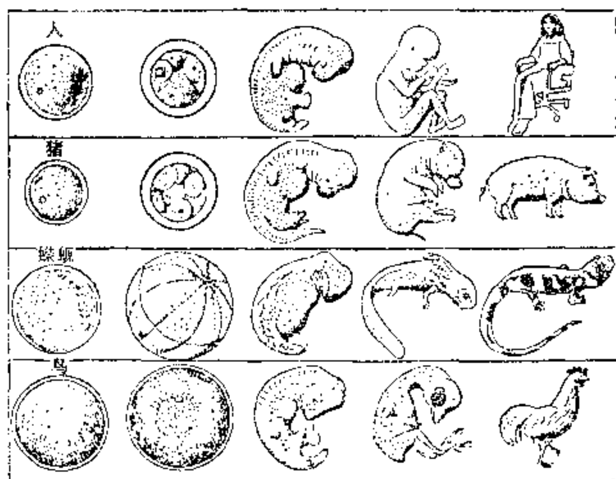



图9-12　胚胎发育

### 9.8.4　人体生长发育

人的生长是指人体的重量和体积的增加。身体的生长发育主要是细胞数目的增多。细胞数目的增加与体重的增加为

正相关。人类在长到一定程度后就会停止生长。物质的合成、代谢的速度逐渐降低，以后形成的物质和分解代谢所消耗的物质趋于相当。最后，体内物质的分解超过合成的速度。人类在生长过程中，体内所有的组织和器官都参与，只是各个部分的生长速度不相同。例如头部、躯体和四肢生长速度很不相同。图9-13是胎后生长发育的各个时期的变化情况。所有各个生长阶段都以同一高度为基准。

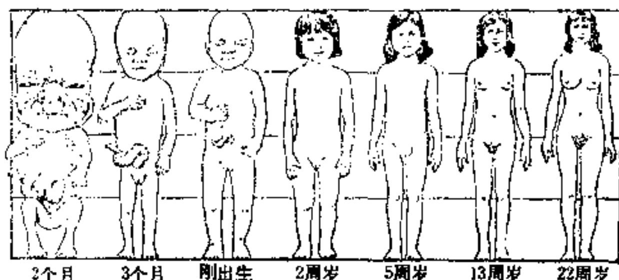



图9-13　人体生长发育

从图9-14可以看出，人体的外形各个时期大体上是相似的，只是因为各部位发育的比例不同，也就是存在多个相似比$\beta_i$，所以人体发育的各个时期体形并非完全相似，而可能是一种自仿射关系。

# 第十章　断裂与分形

金属材料作为重要的结构材料，在使用过程中发生断裂现象，将造成损失，甚至重大事故。因断裂而酿成飞机失事、原子能发电站爆炸的重大事故并不鲜见。

在外应力（拉伸或冲击）作用下，当作用力超过材料的抗张强度时，就会发生断裂现象。

造成材料断裂的具体原因很多，可分为多种类型，如按材料塑性变形的大小分为韧性断裂和脆性断裂；按裂纹扩展路径分为穿晶断裂和沿晶断裂；按断裂面相对应力轴取向分为正断和切断等。但无论何种断裂，裂纹均以“Z”字形前进，大的Z字形套小的Z字形。整个裂纹路径形成多层次结构，而断裂面是粗糙的，不规则的，具有统计自相似性，即裂纹是一条分形曲线，断裂面是一个分形表面。

近年来，金属断裂面的定量分析成为材料变形和断裂研究不可缺少的部分，这方面的研究可以为其它金相方法提供互补的信息。但目前还没有一种合适的方法来定量描述断裂面的特征。在这方面的进展中，柯斯特(M　Coster)作了很好的评述，认为分形是新方法之一，用分维来表征断裂面，它是断裂面粗糙度的一种度量，断裂面的形貌受材料微观结构（晶粒、沉淀相和夹杂物等）、宏观结构（样品的尺寸、形状和缺口等）和实验条件的影响。而这些影响断裂面形貌的因素，则决定了材料的力学性质。因此，通过对断裂面的

分维测量可以了解材料的结构和力学性质。

本章将具体分析断裂面的分形特征，断裂表面模拟和分维测量方法的进展等，这对材料研究有着实际效用。

## §10.1 断裂面的分形特征

对材料断裂表面的传统分析中，只能定性地说明断口形貌是脆性、韧性或两者的混合形式等。对断面细节特征的观察，发现材料中裂纹的扩展往往是按Z字形前进的，每一步都是不规则的，大小不等，方向不一，而且往往在大的Z形通道上又有小Z形通道，有不同层次的嵌套结构，具有自相似性，是分形结构。

1984年，曼德布罗特等人首次用分形论的观点，描述断裂表面的特征。指出，金属断裂面虽然不是严格的分形结构，但与分形结构极为相似，并发现马氏体时效钢的冲击能随断面分维的增加而线性地降低（图10-1）。次年龙期威从理论上分析了临界裂纹扩展力与分维的关系。此后，国内外许

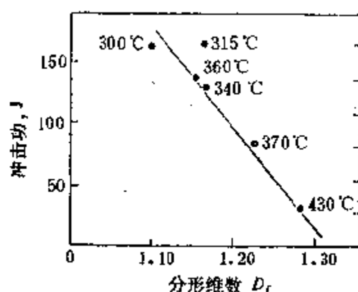



图10-1 冲击能与断面分维的关系

多学者从事这方面的研究，相继取得研究成果。实验结果表明，双相钢疲劳裂纹扩展门槛值$\Delta K_{th}$随分维$D_f$的增加而线性地变化（图10-2），有如下关系

$$\Delta K_{th}=68.0D_f-65.9 \tag{10-1}$$

这里把裂纹扩展门槛值与分维联系起来。

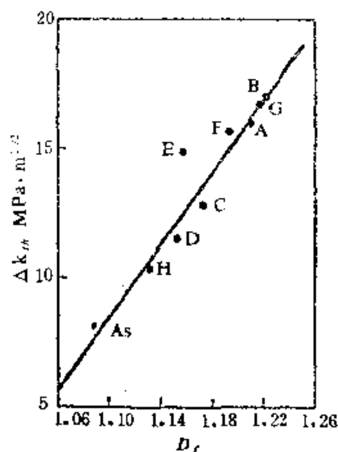



图10-2　$\Delta K_{th}$与$D_f$的关系

## §10.2　断裂表面的模拟

断裂表面周边的不规则性，用分维$D_f$来度量，有如下关系

$$N(r)=Kr^{-D_f} \tag{10-2}$$

式中$N(r)$为覆盖整个周边所需大小为$r$的尺码数。

日本松下贡仔细研究了式（10-2）的应用。探讨了断裂

面模拟的模型。取一个边长为一单位的正方形，第一步将它分为边长为原边长1/2的四个正方形，然后随机舍去其中一个。第二步将保留下的三个小正方形各自分成边长为$(1/2)^2$的四个更小的正方形，并各自随机舍去一个。同样，对保留下的$3^2$个更小的正方形作如前处理。如此下去，以至无穷。这样，形成一个凹凸不平的表面（图10-3）。

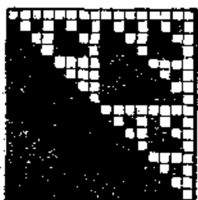


图10-3 断裂面模拟

显然，第$n$步舍去了$3^{n-1}$个边长为$2^{-n}$的小正方形。当$n\gg1$时，共舍去边长大于$r=2^{-n}$的正方形总数为

$$N(r)=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)\approx\frac{3^n}{2} \tag{10-3}$$

只要$n$足够大，则有

$$N(r)\propto r^{-x}=2^{nx} \tag{10-4}$$

$$x=\ln3/\ln2=1.5849\cdots\cdots$$

这里$x$是分维$D_f$的逼近。

我们容易将上述结果推广到$d$维超立方体的情形。第一步，把$d$维超立方体分成边长为$1/b$大小相等的$b^d$个小立方体，任意舍去其中的$i$个，这里$b$为任意整数。第二步，对保留的$b^d-i$个小立方体，各自分成$b^d$个更小的立方体，然后，各自任意舍去$i$个。如此不断操作，以至无穷。到第$n$步共舍去边长大于$r=b^{-n}$的超立方体总数为

$$N(r)=i[1+(b^d-i)+(b^d-i)^2+\cdots+(b^d-i)^{n-1}]$$

$$= i\frac{[(b^d - i)^n - 1]}{b^d - i - 1} \propto (b^d - i)^n \propto r^{-x} \qquad (10\text{-}5)$$

所以

$$X = \ln(b^d - i)/\ln b \qquad (10\text{-}6)$$

$x$是分维$D_f$的逼近。显然，当$d=2, b=2, i=1$时，式(10-6)便回到式（10-4）。

这个模型与第四章中规则分形的构造规则很相似。此模型已用于漂冰的断裂和岩石的断裂分析中。

## §10.3 断裂力学与分形

1986年，龙期威首先把分形与断裂力学结合起来。裂纹扩展必须满足由格里菲斯(Griffith)能量平衡理论建立的断裂判据

$$G = 2\gamma_s \qquad (10\text{-}7)$$

式中$\gamma_s$是单位面积上的表面能，称为比表面能，$G$是裂纹扩展过程理想弹性体的弹性能释放率，是裂纹扩展的推动力，故称之为临界裂纹扩展力。这是对理想弹性体得到的判据。对实际的工程材料来说，尤其是金属材料，由于在裂纹尖端区域总是要发生或多或少的塑性变形，因而在形成新的裂纹表面时，不但有表面能的增加，而且还要对塑性变形提供变形功。用一个有效功$\gamma_p$取代$\gamma_s$，则方程（10-7）修改为

$$G = 2\gamma_p \qquad (10\text{-}8)$$

尽管从格里菲斯理论出发，考虑了塑性功使方程式（10-7）变为式（10-8），但后来仍有人提出方程的不足，认为方程中应包括应力诱发相变、孪晶、无序化以及化学反应等

的功。这样，塑性功和这些能量的总和可以大于$2\gamma_s$几个数量级，故$2\gamma_s$实际上可以忽略不计。但无论怎样改正，断裂韧性还是与能量有关。也就是说，无论这个能量关系经过多少次修改，它还是现代断裂理论的基础。

值得提出的是在传统的断裂力学中，总是把裂纹看成是一条直线，把断裂面看成是平坦的2维平面。这样考虑对像玻璃那样的脆性材料情形大致如此。但金属材料与玻璃不同，其断裂表面是粗糙而不规则的，断口表面的真实面积大于按平坦光滑平面所得到的表观面积。单位厚度试样断裂表面的真实面积应为$[L(\varepsilon)/L_0(\varepsilon)]\cdot 1$，这里$L(\varepsilon)$和$L_0(\varepsilon)$分别是裂纹扩展的不规则路径和直线路径的长度，$\varepsilon$是测量裂纹时的码尺长度。由于$L(\varepsilon)$具有分形性质，所以$L(\varepsilon)$与码尺的长度$\varepsilon$有关。与传统断裂力学中把裂纹简化为2维平面上的一条直线不同，这里，对式（10-8）作如下修改

$$G = 2L(\varepsilon)\gamma_s/L_0(\varepsilon) \qquad (10-9)$$

而曼德布罗特根据柯曲折线的自相似性质得到曲线的总长度

$$L_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{1-D_f} \qquad (10\text{-}10)$$

式中$D_f$是曲线的分维，在这里即断裂面的分维，而$L_i(\varepsilon_i)$即为裂纹扩展的不规则路径的真实长度$L(\varepsilon)$。所以有

$$G = 2\gamma_s\varepsilon_i^{1-D_f} \qquad (10\text{-}11)$$

对平面应变断裂的情形，有

$$G = K^2/E', \quad E' = E/(1-\nu^2) \qquad (10\text{-}12)$$

式中$E'$，$E$和$\nu$分别为材料的弹性模量、杨氏模量和泊松比，$K$为断裂韧性。于是式（10-11）成为

$$K^2/E' = 2\gamma_s\varepsilon_i^{1-D_f} \qquad (10\text{-}13)$$

所以有

$$2\ln K - \ln E' = \ln 2\gamma_p + (1-D_f)\ln\varepsilon_i \qquad (10\text{-}14)$$

对此式作如下处理，即在实验中，同一种材料的$E$、$\nu$和$\gamma_p$可以认为是常数，于是式（10-14）变成

$$\ln K = C + \frac{1}{2}(1-D_f)\ln\varepsilon_i \qquad (10\text{-}15)$$

选取足够小的码尺长度$\varepsilon_i$，使等于裂纹扩展一步的最小步长，而对同一种材料在不同热处理序列和不同的实验温度下，裂纹扩展一步的最小步长变化很小，因此可以近似认为$\varepsilon_i$为一常数；另一方面，保持码尺长度不变，即使它大于裂纹扩展一步的最小步长，$\varepsilon_i$也应是一常数，于是得到

$$\ln K = A + B(1-D_f) \qquad (10\text{-}16)$$

式中$A$，$B$为与材料和实验条件有关的常数。式（10-16）表明，断裂韧性$K$值的对数与断裂表面的分维$D_f$成线性关系（图10-4）。然而$K$值越大，实验测得的$D_f$值反而越小，为反比例线性关系。这是令人不解的。下一节将作进一步探讨。

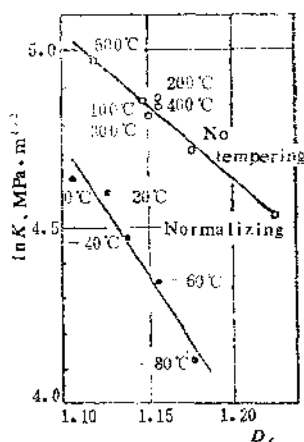



图10-4　断裂韧性$K$与分维$D_f$的关系

实验表明，断裂表面越粗糙，材料的韧性越好。$\ln K$对$D_f$的反变化关系，说明$D_f$并非是断裂表面粗糙度的简单量度，而是分形结构的一个参量。这正说明断裂表面具有近似自相似性质的分形结构。所以通过大量关于材料断裂表面的分形分析

有可能建立断裂韧性与断裂表面分形维数之间的定量关系，从而有可能考查清楚分维与材料的显微结构及断裂韧性之间的关系。这种关系的建立就有可能直接从材料（部件）破坏之后的断口分维分析推断出它的断裂性质，这对材料和部件的失效分析，将有重要的实际意义。

## §10.4 寻找真正的分维

材料断裂表面的分维是断裂表面粗糙度的一种量度。因此，材料断裂韧性越好，断裂表面越粗糙，断裂表面的分维$D_f$值就应该越大。然而，许多学者却得出完全相反的结果，这个问题一直令人困惑不解。1988年龙期威和穆在勤发现，用小岛（*slit island*)法测得的断裂表面的分形维数不是断裂表面的真正分维$D_f$，而是表观分维。当测量码尺较大时，分维与$\ln K$之间成反比例线性关系，只有当测量码尺小于裂纹扩展的最小步长时，才能得到分维$D_f$与$\ln K$之间的正比例线性关系。本节将介绍这一研究结果的详细内容，相信对这方面的研究工作的深入发展将有所裨益。

### 10.4.1 实验方法

用垂直剖面(*Vertical Section*)法，对平面应变断裂韧性试样断面，测量平行与垂直裂纹扩展方向的剖面轮廓线的分维，得到不同方向剖面分维与$\ln K$之间具有不同的线性关系。

测量分维的样品是30CrMnSi$Ni_2$A高强度钢，其化学成份（重量百分比）为

| C | Si | Mn | Ni | Cr | P | S |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 08 | 1.11 | 1.58 | 1.04 | 0.013 | 0.006 | 0.29 |

将材料加工成15×30×150mm的三点弯曲样品，经过不同的热处理得到不同韧性水平。根据平面应变断裂韧性实验方法进行三点弯曲实验，获得大小不同的平面应变断裂韧性$K$值。经过有效性检验，全部样品都满足平面应变条件。

把断裂样品在疲劳裂纹前缘2mm处垂直断裂表面分别沿着和垂直于裂纹扩展方向切开，得到平行和垂直于裂纹扩展方向的两个剖面。切下的样品用酚醛树脂镶嵌，然后用砂纸磨光剖面，最后用0.5μm人造金刚石研磨膏抛光。因为金属与镶嵌剂的材料不同，在显微镜下清晰地显示出金属断裂剖面轮廓线的细节，对2mm长的样品，放大1000倍拍照，将照片接起来，得到总长度2m的轮廓线。

利用式（10-10），断裂剖面轮廓线总长度$L(\varepsilon)$与测量码尺$\varepsilon$有如下关系

$$\ln L(\varepsilon) = (1 - D_f)\ln\varepsilon \tag{10-17}$$

由此式即可得到$D_f$值。

### 10.4.2 断裂韧性与分维的正比例线性关系

图10-5是断裂面的两个不同方向轮廓线分维$D_1$和$D_2$与断裂韧性$K$对数值的关系。由图可以看出，平行于裂纹扩展方向的分维$D_1$与$\ln K$成正比例的线性关系，垂直于裂纹扩展方向的分维$D_2$与$\ln K$成反比例线性关系。在较高的韧性水平，$D_1 > D_2$；在较低韧性水平$D_1 < D_2$。

根据式（10-10），$L_1 \propto \varepsilon^{1-D_1}$，$L_2 \propto \varepsilon^{1-D_2}$，其中$L_1$和$L_2$分别是平行和垂直裂纹扩展方向的剖面轮廓线长度的测

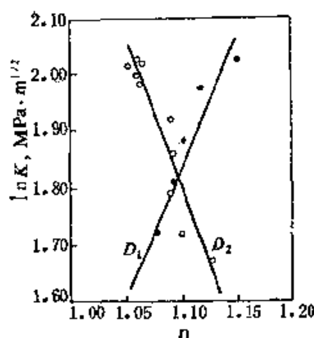



图10-5　$\ln K$与分维$D_1$和$D_2$的关系

量值，$\varepsilon$是测量码尺的相对长度。根据弹性断裂力学，临界裂纹扩展力$G=2\gamma_p$，其中$\gamma_p$是有效表面能，即单位裂纹面积真实表面能和塑性应变能的总和。每单位试样厚度断裂表面的面积$A$近似等于$L_1\cdot L_2$，于是

$$\frac{G}{G^0}\propto\frac{A}{A_0}\propto L_1\cdot L_2\propto\varepsilon_0^{2-(D_1+D_2)}$$

式中$A_0$是$\varepsilon=1$时的$A$值，对应的临界裂纹扩展力为$G^0$，而$G=K^2/E'$，$E'$是弹性模量。所以有

$$\ln K\propto\frac{1}{2}[2-(D_1+D_2)]\ln\varepsilon_0$$

其中$\varepsilon_0$代表裂纹扩展的最小步长，通常情况下，$\varepsilon_0<1$，因此

$$\ln K\propto\alpha[(D_1+D_2)-2] \tag{10-18}$$

式中$\alpha=-\frac{1}{2}\ln\varepsilon_0$。由式（10-18）可以看到，$D_1+D_2$与$\ln K$之间变化的线性关系。图10-6是这种正比例线性关系。

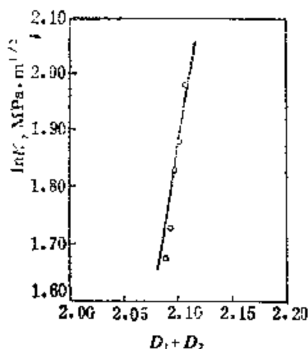



图10-6 $\ln K$与分维$(D_1+D_2)$的关系

当材料韧性较低时，往往形成河流花样的断裂，沿裂纹扩展方向的断裂表面是平坦的，即裂纹扩展步长较大；而垂直裂纹扩展方向形成许多小的台阶。就剖面轮廓线粗糙度而言，垂直裂纹扩展方向大于平行裂纹扩展方向，这可能就是脆性材料$D_1>D_2$的原因。

当材料的韧性较高时，沿裂纹扩展方向出现韧窝断裂，裂纹扩展的步长相对减小，粗糙度增加；而垂直裂纹扩展方向，产生的塑性形变相互之间有一定的协调作用，使剖面起伏较小，粗糙度降低，这可能就是韧性较高材料$D_1>D_2$的原因。

在实验中注意到，剖面应有足够的放大倍数，以保证显示裂纹扩展和不同断面的细节。测量码尺的取值范围是一个重要问题，当测量码尺过大或过小时，$\ln L(\varepsilon)\sim\ln\varepsilon$曲线的数据点偏离直线。因此在测量分维时应取$\ln L(\varepsilon)\sim\ln\varepsilon$数据点的直线部分。即无标度域为取值范围。

作者同杨道明等完成的动态断裂韧性的分形研究中所得到的结果与上述实验结果相一致。实验中用于断裂表面分维测量的材料为58SiMn钢和28$Cr_2$MoVA钢，材料加工成10×10×55mm的三点弯曲试样。58SiMn钢经正火处理，28$Cr_2$MoVA钢经退火处理。在不同加载速率下获得大小不

同的平面应变动态断裂韧性$K$值。

两种材料分别采用小岛法和侧面轮廓线法（即垂直剖面法）测量分维值$D_f$。58SiMn钢用小岛法，利用图像分析仪测量断面上各小岛的面积和周长。$28Cr_2MoVA$钢用侧面轮廓线法，将断裂试样在疲劳扩展方向切开，得到平行和垂直于裂纹扩展方向的两个剖面。经扫描电子显微镜(SEM)放大1000倍，连续拍照，将照片拼接起来，得到的总长度为1.5m，然后用不同码尺测量其长度，并计算分维值。

实验结果表明，图像分析仪测量的小岛面积和岛周长，在双对数坐标图上发现，其关系为很好的直线关系，说明断裂表面是一个分形结构。利用$n$个不规则小岛的面积和周长，得到$n$组$\ln A \sim \ln P$数据，再利用最小二乘法作线性回归，即得到分维值。小岛法将在下节作具体介绍。表10-1是不同断裂韧性试样的$D_f$值。

表10-1　58SiMn钢不同断裂韧性试样的$D_f$值

| 样　品　号 | $K$ | $D_f$ |
|---|---|---|
| 30 | 1.531 | 1.139 |
| 26 | 1.510 | 1.151 |
| 28 | 1.482 | 1.159 |
| 24 | 1.356 | 1.242 |
| 31 | 1.277 | 1.324 |

分维反映不同加载速率所引起的材料微观结构的变化，以及断裂机制的变化，因此$D_f$值可以做为金属断裂韧性的一

种度量，说明可以通过分形几何来寻找微观断裂特征和宏观力学性能之间的关系。但表10-1中的数据显示，随着$D_f$值的增长，$K$值单调下降，$D_f$与$\ln K$成反比例线性关系，这说明这里分维只是一种分形参数。而在侧面轮廓线法测量28$Cr_2$-MoVA钢5个试样垂直和平行于裂纹扩展方向的轮廓线的分维结果表明，$D_1+D_2$与$\ln K$之间呈正比例线性关系，这才是真正的分维$D_f$。我们看到不同研究组得到同样结论。

## §10.5 分维测量方法进展

过去，断裂力学对断裂表面的平面近似显然是过于简化了。分形论把断裂表面的本来形貌展现在我们面前，这无疑是重要的突破性的观念转变。人们以喜欲的心情注视这一原来平淡无奇的领域在分形论的分析中显示出多彩的世界。但这一多彩世界的真正显现，需要通过定量化的桥梁，这就是分维$D_f$值。通过$D_f$值来表达系统的分形性质。所以，如何测量系统的分维$D_f$就成为重要的问题。在探索$D_f$测量方法的众多工作中，首推由曼德布罗特提出的小岛法。此外，又相继提出垂直剖面法，扫描电子显微镜(SEM)二次电子灰度阴影法，显微干涉-计算机图像处理法，扫描隧道显微镜（STM）法和核磁共振成像（MRI）法等。其中垂直剖面法已在上一节作了介绍，其他的方法我们在这里作简要介绍。

### 10.5.1 小岛法

在欧氏几何中，对如三角形、正方形和圆形等规则几何图形，有如下关系

$$P \propto A^{\frac{1}{2}} \tag{10-19}$$

式中$P$为图形的周长，$A$为面积，对自然界中海岛、材料中的微结构等不规则图形，曼德布罗特认为存在如下关系式中

$$P^{\frac{1}{D_f}} \propto A^{\frac{1}{2}} \tag{10-20}$$

$D_f$是不规则图形边界线的分维。由式（10-20）有

$$\ln P = C + \frac{D_f}{2}\ln A \tag{10-21}$$

式中C是常数，由此式可知$D_f/2$为$\ln P \sim \ln A$图中直线的斜率，则分维值$D_f$为斜率的2倍，

将做完断裂韧性实验的样品断口表面，利用真空镀膜技术蒸镀一层金属镍，然后平行于断口平面用细砂纸磨去一层，再经研磨膏抛光，则断口上原来凸出的部分被磨去之后，在显微镜下观察为一个个发亮的岛状结构，故称为为岛；断口上原来凹下去的部分没有磨到仍为镀上的镍颜色，在显微镜下发暗，称为湖。于是整个断裂面形成一个分布着大大小小岛屿的湖。在图像分析仪的屏幕上可以看到千姿百态，形状各异的湖中之岛。

利用图像分析仪可以方便地测量出每个岛的面积和周长，然后在双对数坐标图上绘制曲线，曲线的直线部分的斜率的2倍即分维$D_f$值。图10-7是30CrMnSi$Ni_2$A钢断裂面的分形结构（岛）周长-面积关系。从图上可以看到，在双对数坐标图上周长与面积成很好的直线关系。说明断裂表面确实是一种分形结构。对每个样品分别测量10～15个视场，图像分析仪把所测量的一系列岛的周长和面积数据都储存在计算机中，利用线性回归程序计算分

维$D_f$：

$$D_f=2\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln A_i\ln P_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln A_i\sum_{i=1}^{n}\ln P_i}{\sum_{i=1}^{n}(\ln A_i)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln A_i\right)^2}$$

(10-22)

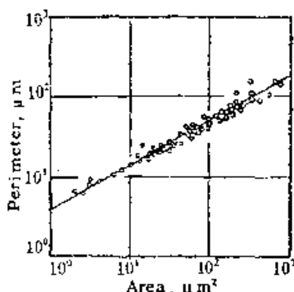



图10-7 30rMnS$_i$Ni$_3$A钢断裂面分形结构周长-面积关系

### 10.5.2 显微干涉-图像处理法

材料断裂或损伤断口表面很不规则，它蕴藏着关于断口形成机理的丰富信息。近年来，在应用分形论对材料断裂或损伤断口表面进行定量分析中已取得诸多进展。其中分维测量方法的进展，对分形理论研究及其实际应用起着双向推动作用。

这里介绍新近由刘明华和李光霞等提出的一种分维测量方法。它不同于小岛法，对样品不采用研磨和抛光的方法，来形成可以反映断裂表面无规程度的小岛海岸线。这个方法是运用分别从光学平面和断口表面反射的光波进行干涉，而形成表征断口表面微观形貌等高线的干涉条纹，其中封闭的等高线可视为分形曲线，相邻等高线的平均高差为0.25μm，借助计算机图像处理系统，利用周长-面积关系计算分维。这里周长和面积分别是封闭等高线及其所包围的面积。

测量系统如图10-8。该测量系统由干涉显微镜、CCD摄像机、图像处理系统、监视器、微机及打印机等组成。

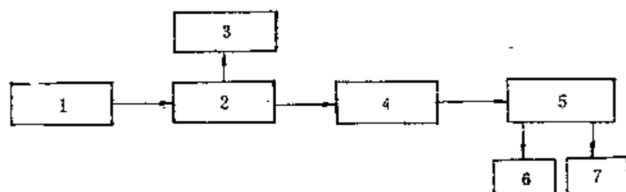



图10-8　显微干涉-图像处理系统

1—显微干涉仪；2—CCD摄像机；3—监视器；4—图像采集卡；5—IBM PC/AT微机；6—打印机；7—绘图仪

这个方法为非破坏性和非接触性测量，精度高，测量速度快。这些优点是小岛法所不及的。特别应指出的是在小岛法以及垂直剖面法中，由于需要对试样进行分维测量前的工艺处理，如切割、研磨和抛光等繁杂的工艺处理过程，不仅费时，更重要的是在这些工艺过程中可能在一定程度上破坏了断裂表面的原有形貌，这些都是不利的因素。而在显微干图像处理法中则完全克服了这些缺点，确是分维测量方法的可喜进展。

### 10.5.3　二次电子灰度法

这个方法的基本设想是用扫描电子显微镜直接拍摄样品表面的二次电子形貌像，再用计算机图像处理系统对表面形貌像提取等灰度值阴影边界，用阴影边界线的分维$D_f$来表征表面的无规则粗糙度。

SEM二次电像主要反映固体表面的3维形貌特证。表面二次电子发射量与电子束对固体表面法线夹角$\theta$的余弦倒数（$1/\cos\theta$）成正比，即二次电子信号强度$I_s$与入射电子束强度$I_p$的关系为

$$I_s = CI_p/\cos\theta \tag{10-23}$$

式中C是常数。表面不同程度的凹凸起伏，使入射电子束呈不同程度的倾斜，因而由各相应微区发射的二次电子量也不相同，从而导致显像管图像上对应的亮度差异。这样，在统计意义上，我们视粗糙表面的不规则程度与SEM图像灰度值的差异二者区域分布的不规则程度，是一致性的。分形的表面必然产生分形的SEM灰度值阴影，等灰度值阴影边界分维与表面分维存在着统计意义上的对应关系。

用这种方法测量分维时，应使被测表面清洁无附着物，进行图像处理时，应根据灰度级像素方阵图来选取灰度级阈值，以保证分维值的真实可靠性。

### 10.5.4 扫描隧道显微镜(STM)法

扫描隧道显微镜(STM)是美国IBM公司苏黎士研究所宾尼格(G Binnig)和洛旭(H Rohrer)于1981年发明的，是一种基于量子隧道效应的新型高分辨显微镜。STM是继第一代光学显微镜和第二代电子显微镜之后的第三代显微镜，能以最高的原子级空间分辨来观测物质表面原子或分子的几何分布和态密度分布，确定物体局域的光、电、磁、热和机械特性。STM结构小巧，操作方便，不仅可在超高真空环境，而且可以在大气或液体中对样品进行原子级分辨率的无损观测。

根据量子力学原理，多原子尺度针尖与被研究物质表面非常靠近（<1nm）时，在外加电场作用下，电子会穿越探针与被测物体表面间的空隙，而产生隧道电流$I$。而$I$对针尖与样品表面之间的距离十分敏感，距离每减小0.01nm，隧道电流$I$可增加一个数量级。利用此量子隧道效应，可以实时测得物体表面的实空间3维图像。测量的分辨率，对平行和垂直于表面方向分别为0.1nm和0.01nm。

对由STM获得的3维表面作分形分析即可得样品表面的分维值。

此外，核磁共振成像(MRI)法，中子和X-射线小角散射法等，都是新近提出的新方法。

上述介绍的各种方法不仅用于断裂表面分析，也可以用于别的体系，可以根据具体情况选择。随着分形论研究的深入发展，新的测定分维的方法相继涌现，而每一个新方法的出现，都在某种意义上推进了分形研究的新发展。

# 第十一章　地震预报

大自然赋予人类生命、活力、希望与欢乐，但也给人类带来灾难与死亡，地震就是一种灾难性的自然现象。显然，地震准确预报成为人们追求的重要目标。分形论为这一目标提供新的与其它方法互补的途径与方法。

我们首先对地球构造和地震作一简要介绍是必要的。

地球是大宇宙千万颗行星中的一颗，是太阳系九大行星之一，它不停地自转和公转，还随着太阳系在宇宙中遨游。

地球的形状不是一个理想球体，而是一个稍带扁度的椭球体，两极半径稍短，赤道半径稍长，两者相差 21km，平均半径6371km。

地球内部大致分为地壳、地幔和地核三大部分。

地壳是由各种不均匀分布的岩石（花岗岩和玄武岩）组成。它至少在40多亿年前就形成了。地壳只占地球全部结构中极薄的一层，平均厚度在30～40km。有些地方较厚，如我国的西藏高原厚达60～80km；有些地方较薄，如在大洋之下只有几公里。地壳在不断地运动变化之中，沧海桑田，大约距今5～7亿年以前，我国的很多地方还处于汪洋大海之下，经过多少次地壳变化运动，海水时浸时退，终于形成如今的形貌。当然地壳运动变化还在继续之中。人们在喜马拉雅山和天山上发现海洋动物和植物的化石，就是证明。地壳中的岩石层在经历了长期的运动变化之后，发生倾斜或褶皱

变形，在岩层倾斜褶皱严重的地方就出现断裂错动，形成复杂的地质结构。

地幔在地壳下，厚约2900km，据推测，其上层主要由橄榄岩组成，这种物质非常坚硬，结构均匀。据测，已知的最深的地震发生在地下约700km的地方，即地幔上部。

地球的中央部分为地心，称为地核，分外核和心核。据横波不能通过液态物质，推测外核可能是由液态物质组成的。

地球物质处在不断运动变化过程中，由于运动发展变化的不均匀性，便是地震发生的原因。

地球运动变化，对各部分岩层产生巨大的地应力，作用于地壳岩层，使某些岩层发生褶皱变形。地应力的作用逐渐加强，使褶皱变形逐渐加剧。当地应力超过某处岩层的强度时，就会在此处突然发生断裂错动；这时由于地应力集中所积累起来的能量，便急剧地释放出来，引起周围物质的振动，并以弹性波的形式向四面八方传播出去，这种弹性波称为地震波。当地震波传播到地面时，大地随之振动起来，形成地震。称这种地震为构造地震。大多数地震都是构造地震。此外，还有因火山喷发引起的地震称为火山地震。由于溶洞等坍塌引起的地震称为陷落地震等。这后两类地震都较小。

我国拥有世界上最早的地震资料，早在公元前1700多年，就有关于地震的记载，3000多年来，共有上万次关于地震的记录，其中破坏性地震达600多次。我国科学家张衡于东汉汉顺帝阳嘉元年，即公元132年发明了世界上第一架地震观测仪，后人称为张衡地动仪。

观测研究表明，大地震主要发生在地壳运动强烈的地

带。地壳的某些地区局部相对上升，形成高山；某些地区局部相对下降，形成平原、湖泊、河流。在地壳相对上升和下降的交界地区，也就是地质差异构造运动活跃的地区，出现断裂带。近100万年来形成的断裂带，至今还在继续活动。在活动断裂带上，一些曲折突出部分，活动断裂带两端和活动断裂带交汇的地区，是地震常常发生的地区。

总之，地震是岩层在大地构造应力的作用下，产生应变，逐渐积累大量的应变能。当应变超过某极限值时，岩石突然断裂，迅猛释放大量能量，发生地震。

本章从岩石断裂的分形效应开始，讨论地震的分形性质与预报问题。

## §11.1 岩石断裂的分形模型

地球的表面层由岩石组成，但物理学家很少研究岩石，其原因是岩石显而易见的复杂性使人望而生畏。近年来，大胆探索的物理学家涉猎这一陌生的领域，而能源危机的威胁和石油价格上涨势头，对促进岩石研究提供刺激和动力，因为对岩石物理性质的了解，可能为石油工业所采用的工程技术的改进带来希望。我们在这一章讨论岩石断裂的性质，主要则是由于它与地震的关系。

地震与岩石的断裂直接有关，因此研究岩石的断裂规律对地震研究是有意义的。岩石断裂与金属等材料中的断裂情况也很类似，所以可以直接引用式(10-11)，即

$$G = 2\gamma_p \varepsilon_i^{1-D_f} \tag{11-1}$$

岩石是粗晶粒结构，其断裂表现为脆性断裂，主要形式

为沿晶脆断、穿晶脆断和偶合脆断。这几种断裂形式的裂纹扩展都是不规则的，大体上可以视为沿Z字形扩展，细观察发现大Z字形套着小Z字形，具有多层次结构，存在统计自相似性，所以具有分形性质。

### 11.1.1 沿晶断裂模型

对沿晶脆性断裂，裂纹沿晶粒边界传播，有两种情况，如图 11-1，其中图11-1($a$) 裂纹沿$abc$路径扩展；图11-1($b$) 裂纹沿$abcd$路径扩展。假定两种情况都是正六边形晶粒，角 $\angle abc=120°$。第一种情况中，折线 $abc$ 为生成元，夹角为$\theta$的折线，相似比为

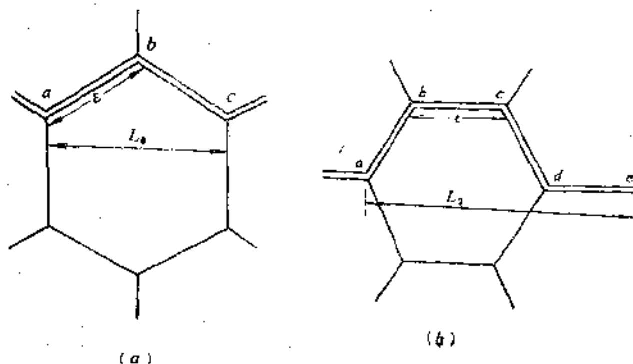



图11-1　沿晶脆断的分形模型

$$\beta=\varepsilon/L_0=\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\Big/\sin\theta \qquad (11\text{-}2)$$

此处$\theta=120°$，所以$\beta=1/\sqrt{3}$，生成物数为$N=2$，所以相似分维

$$D_s = \ln 2/\ln\sqrt{3} = 1.26$$

第二种情况，裂纹沿折线$abcde$走向扩展。取$\varepsilon = 1$，则$L_0 = 3$ $\beta = 1/3, N = 4$，所以相似分维为

$$D_s = \ln 4/\ln 3 = 1.26$$

可见沿晶断裂的两种情况，分维是一致的。

### 11.1.2 穿晶断裂模型

岩石在形成过程中通常存在大量的微孔隙和微裂纹，所以，当岩石脆性断裂时，常常发生穿晶断裂，主要原因是微裂纹引起应力集中和弹性能积累之故。穿晶断裂的主要特征是在一个晶粒平面上形成一个台阶，如图11-2所示。现在生成元为$L_0 = ad = \sqrt{5}\,\varepsilon$，则$\beta = 1/\sqrt{5}$，而生成物$N = 3$，所以相似分维为

$$D_s = \ln 3/\ln\sqrt{5} = 1.365$$

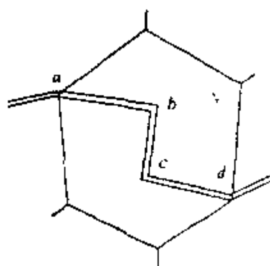


图11-2 穿晶脆断的分形模型

实际观测发现，任何一个岩石断裂表面总能找到沿晶和穿晶断裂同时存在的断裂花样。其原因是一般为沿晶断裂，但因为晶粒中的微裂纹、微孔隙和夹杂物的存在，引起应力集中，产生穿晶断裂。所以，岩石断裂常常是两者偶合型的。

### 11.1.3 临界裂纹扩展力

由式（11-1）和式(11-2)，当选取$L_0$为单位长度时，有

$$G = 2\gamma_s\left(\frac{1}{\beta}\right)^{D_f - 1} \qquad (11\text{-}3)$$

对沿晶断裂的第一种情况

$$G = (1.732)^{0.26} \times 2\gamma_s = 1.15 \times 2\gamma_s$$

对沿晶断裂的第二种情况

$$G = (3)^{0.26} \times 2\gamma_s = 1.33 \times 2\gamma_s$$

对穿晶断裂

$$G = (2.236)^{0.365} \times 2\gamma_s = 1.34 \times 2\gamma_s$$

表11-1为不同断裂形式计算值与实测值的比较。

表11-1 不同断裂形式的分维与$G$值

| 断裂形式 | 分维理论值 | 分维测量值 | $G$值 |
|---|---|---|---|
| 沿晶($a$) | 1.26 | 1.18 | $1.15\times2\gamma_s$ |
| 沿晶($b$) | 1.26 | 1.18 | $1.33\times2\gamma_s$ |
| 穿晶 | 1.365 | 1.31 | $1.34\times2\gamma_s$ |

由表11-1可以看出分维的理论值与测量值是相符合的。临界裂纹扩展力$G$的计算说明，沿晶($a$)的情形耗散能量最少，最容易发生，而三种断裂形式中，穿晶断裂耗能最多，较难于发生。从三种不同的断裂形式中，我们看到分维确实反映了裂纹的不规则程度，从而可能追溯到岩石断裂时的力学行为。虽然$G$值是岩石力学行为的一个综合量，但为我们提供一个方法：从材料破坏之后的断裂表面分析去推测其断裂性质。

## §11.2 岩石破碎的三角形效应

破碎的石块不难看到，特别在矿山、铁路和采石场，几乎随处可见。大量观测发现，岩石破碎过程中，无论大石块，还是小石块，总是存在至少一个三角形状的表面（图11-3）从物理和力学角度分析，岩石在爆炸冲击力或切割力作用下破碎，其碎块的最稳定的结构面是三角形，因为此时耗能最少。于是，可设想岩石的破碎过程：一个大三角形石块破碎后成为若干个小三角形石块，小三角形继续破碎，依此类推，将得到无数个三角形碎块。实际情况是在某种作用力（如地

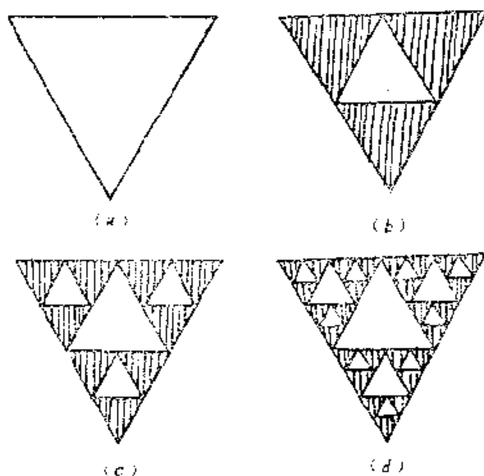



图11-3　岩石破碎过程的分形图

震，爆破）下，瞬间同时产生大大小小不同尺寸的石块。这里重要的是在这个过程中形成的不同大小石块的整体图形与

局部图形具有自相似性，局部是整体的缩影，即具有分形性质，所以可以用谢尔宾斯基垫片的构造规则来模拟。其分维

$$D_f = \ln 3/\ln 2 = 1.5849$$

根据谢和平的分析结果，在某一平面上岩石破碎过程的分维可能为

$$1.5849 \leqslant D_f \leqslant 1.8928$$

而实际上是一个立体问题。所以岩石破碎的分维值范围为

$$2.0 \leqslant D_f \leqslant 2.7268$$

从式(11-3)可知，分维$D_f$越大，则临界裂纹扩展力越大，表明岩石断裂破碎所需耗散的能量越多。因此，由分形分析也同样得到岩石破碎的三角形效应。

## §11.3 裂纹分叉的分形规律

材料裂纹分叉现象，在各种受载和几何条件下均能见到，对岩石类脆性材料更容易发生。引起裂纹分叉的实质至今还没有作出圆满的物理解释。研究发现，裂纹分叉与断裂面的粗糙程度紧密相关，因为裂纹分叉明显增大材料断口的不规则性。史密斯（E Smith）从理论上研究了裂纹分叉的非规则性对脆性材料断裂韧性的影响，分叉将使断裂韧性增加。由此可知，裂纹分叉的非规则性实际上是材料物理力学、形变破坏和微结构的综合反映。现在从分形论的观点来探讨这个问题。

### 11.3.1 裂纹分叉现象

岩石裂纹分叉现象处处可见，可以小到晶粒尺度，大到

几十公里的断层。图11-4是煤的微裂纹分叉现象的显微像。



图 11-4 煤的微裂纹分叉现象

岩层在构造应力作用下形成断层带，图11-5是两幅局部地区断层分叉的图示。裂纹分叉是岩石断裂的重要表现，它影响岩石材料的物理力学性质，地下工程结构的稳定性及地质构造形成机理和分析模拟。因此，裂纹分叉研究是很有意义的工作。

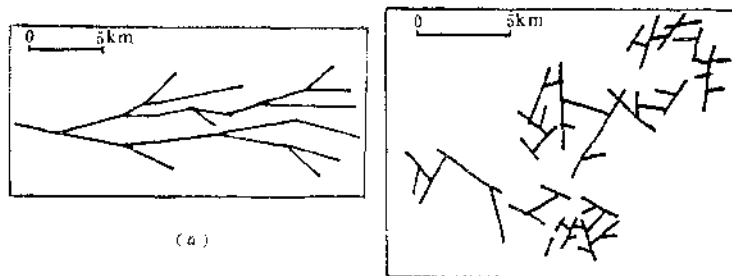
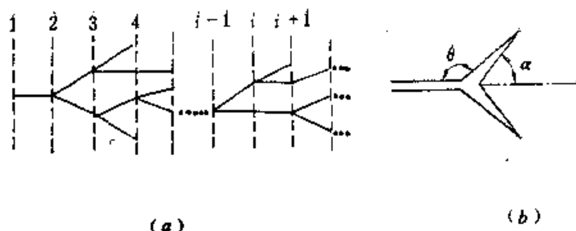



图11-5 区域断裂分叉

($a$)陕西秦岭区域；($b$)河南马楼区域

### 11.3.2 裂纹分叉的分形规律

对各种岩石和不同地区的研究表明，裂纹分叉都表现出几何不规则性。可以假定裂纹分叉的形成过程是这样：在第$i+1$步新的裂纹分叉是从其前一步（第$i$步）裂纹分叉群基础上连续生成的子群，如图11-6($a$)。这样就构成一个自




(a) (b)

图11-6 裂纹分叉的分形模型

相似分叉系统。图11-6(b)是裂纹分叉的分步模型。

根据式(11-2)，这里相似比为

$$\beta = \varepsilon/L_0 = 1/2\sin\frac{\theta}{2}$$

由图11-6(b)有$\theta=\pi-\alpha$,则

$$\beta = 1/2\cos\frac{\alpha}{2}$$

而生成物数为$N=3$,所以体系的分维为

$$D_s = \ln 3/\ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right) \tag{11-4}$$

根据式(10-13)，断裂韧性$K$可以表示为

$$K = (E'G)^{1/2} = (E'G_0\varepsilon^{1-D_f})^{1/2} = K_0\varepsilon^{\frac{1}{2}(1-D_f)} \tag{11-5}$$

其中$G_0$和$K_0$分别为没有考虑分叉非规则性分形效应的裂纹顶点的临界裂纹扩展力和断裂韧性。利用式(11-4)或式(11-5)，可以计算裂纹分叉角对裂纹断裂韧性的影响。表11-2给出裂纹分叉角对断裂韧性的影响。

表11-2　裂纹分叉角对断裂韧性的影响

| $\alpha$(度) | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_s$ | | 1.594 | 1.620 | 1.668 | 1.741 | 1.847 | 2.000 | 2.225 | 2.580 | 3.170 |
| $\frac{k}{k_0}$ | $\varepsilon=10^{-2}$cm | 3.93 | 4.18 | 4.66 | 5.51 | 7.03 | 10.00 | 16.79 | 33.02 | 149.91 |
| | $\varepsilon=10^{-4}$cm | 15.42 | 17.46 | 21.08 | 30.34 | 49.43 | 100.00 | 281.83 | — | — |
| | $\varepsilon=10^{-6}$cm | 60.53 | 72.95 | 100.93 | 167.11 | 347.54 | — | — | — | — |

由表11-2可以看出，断裂韧性受裂纹分叉角的影响很大，裂纹分叉越大，所需耗散的能量越多，这种断裂现象越难于发生。表中$\varepsilon$的值为晶粒尺寸，在同一分叉角，晶粒尺寸越小，所需耗散的能量越大。随着分叉角的增大，小晶粒比大晶粒耗散能增大得快。可见微结构效应很明显，在晶粒尺寸$\varepsilon<10^{-4}$cm的材料中难于产生$\alpha\geqslant60°$的裂纹分叉。事实上，岩石的裂纹分叉角$\alpha\leqslant40°$。分形分析与实际相符合。裂纹分叉角越小，断裂所需的耗散能越小，这种断裂现象越易于发生，这与实际情况也是相符合的。因此，裂纹分叉使断裂韧性提高，被认为可能是一种分形效应。

## §11.4　地震的能量分维

地震中地层产生断裂，所以地震与地层中的断裂密切相关。地震中的断裂有大小不同的尺度，从人造卫星上拍摄的大地裂缝，到各种不同尺度的地区断层、裂纹，它们都存在

着相似性。所以，正如前面几节中讨论过的，对断裂面和裂纹可以用分形进行分析。

地震的震级是按地震时释放出的能量大小来确定。释放出来的能量越多，震级就越大，破坏力越大。震级是根据仪器记录到的地震波来测定。地震与能量传播有关，而且可能是具有自相似性的体系，因此引入能量分形的概念。事实上，地震强度存在自相似性。人们很早就发现，地震越大，发生的次数越少。在地震震级与地震频度之间，有如下著名的$G$-$R$关系：

$$\log N_T = a - bM \qquad (11\text{-}6)$$

这里$M$为震级，$N_T$为震级在$M$以上的地震总数，$a$与$b$为参数，参数$b$反映了岩石所受的平均应力和岩石内部平均强度的大小。金（G King）指出参数$b$与断裂分形有关。

地震的震级$M$与地震波能量$E$的关系为

$$\log E = A + 1.5M \qquad (11\text{-}7)$$

式中$A$为常数。由式(11-6)和式(11-7)有

$$N_T \propto E^{-b/1.5} \propto E^{-D_{fe}} \qquad (11\text{-}8)$$

地震次数与能量成幂次律关系，地震次数随地震波能量的减小而增多。以能量为标度，则能量的分维$D_{fe}$为

$$D_{fe} = b/1.5 \qquad (11\text{-}9)$$

根据观测，$b$值的范围为$0.7 \leqslant b \leqslant 1.3$，所以能量分维值在$0.47 \leqslant D_{fe} \leqslant 0.87$范围内。$b$值所反映的自相似性跨越很大的尺度。实际观测发现，$b$值随时间和空间都有变化。特别是在大地震发生前，根据中小地震计算的$b$值有明显的下降。图11-7是1976年7月28日唐山7.8级大地震前$b$值的变化趋势。1960年5月22日，智利发生8.9级大地震，观测结果，

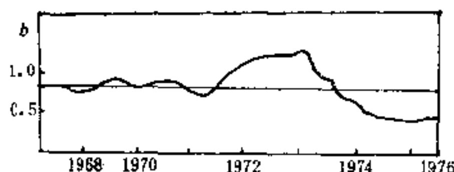



图11-7　唐山大震前b值变化

前震53次，余震186次，前震$b=0.55$，余震$b=1.33$。这里我们看到，地震能量分维$D_f$有可能成为地震预报的新参数。

## §11.5　地震的时间分布

大地震发生前，主震附近小震活动与大震之间的关系研究，已日益引起人们的兴趣与重视。人们希望从小震活动时空分布异常变化的特征，用定量指标来描述震兆关系。近年来，不少学者把分形论引入地震预报领域，用小震活动分维的时空分布作为新的预报指标。这些工作着重研究长时间和高震级的历史地震和近年来我国发生的几次强地震前小震活动时间序列的分维统计。这里介绍戴维乐等对华北地区1970～1988年间12次中强地震前小震时间序列的分维特征。其目的是考查在这12次中强震前，主震附近各时段小活动时间分维是否普遍存在？若存在分形结构，随着时间迫近主震是否出现分维值异常？

### 11.5.1 分析方法

视地震事件在时间轴上为点过程，也就是把地震活动描述为一个不连续集合。假定所研究时间序列起始时间为一个单位时间，取一系列越来越小的时间标度

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\cdots\cdots,\varepsilon$$

逐一计算有震时间段数$N$

$$N\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1\right),\ N\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right),\ N\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right),\cdots,N(\varepsilon)$$

并以有震时段数为纵坐标，时段标尺为横坐标，在双对数纸上绘$\ln N(\varepsilon)\sim\ln(1/\varepsilon)$曲线，曲线上斜率不为1的直线部分称为无标度区。无标度区时间标度跨度至少大于一个数量级。无标度区的存在，意味着其具有分维结构，直线部分的斜率即为分维值$D_f$:

$$D_f=\ln N(\varepsilon)/\ln\varepsilon$$

当确定某一序列具有分维结构，且分维值$D_f<0.5$，则认为出现分维低值异常。一些学者认为时间轴上分维低值异常的出现，可以预示着中强地震的来临。因此，地震的时间分维值$D_f$可能成为地震预报的新参数。

### 11.5.2 实例分析

对华北地区1970～1988年12次中强地震前的小震活动的时间分布作分析。对华北南部取主震震中附近4°×4°范围，选取震前6年至震后1年的时段；对华北北部地区，取3°×3°范

围，震前5年时段。均对震级$M \geqslant 2.0$小震，以2年为单位时间，逐年绘制小震活动时间序列$\ln N(\varepsilon) \sim \ln(1/\varepsilon)$曲线，并求出$D_f$值。

在对华北南部5次中强地震前不同起止时间作出的90个时间序列的统计结果中，有52个时间段存在分维结构。华北北部7次中强地震例，共统计了75个时间序列，其中35个存在分维结构。

下面给出具体结果，先看华北南部5次震例。

固镇（1979年3月2日，5.0级）地震前$M \geqslant 2.0$,2.5小震分维值均稳定在0.71～0.78，震时下降至0.60～0.73，震前未见分维值异常。

溧阳（1979年7月9日，6.0级）地震前$M \geqslant 2.0$小震分维值稳定在0.46附近，震时回升至0.61，$M \geqslant 2.5$小震分维值在0.60～0.64之间，$M \geqslant 3.0$地震分维值在0.63～0.80之间。因此，溧阳地震前$M \geqslant 2.0$小震分维出现低值异常。

荷泽（1983年11月7日，5.9级）地震前$M \geqslant 2.0$，2.5地震分维均未见低值异常，而$M \geqslant 3.0$地震分维出现0.375低值异常。

南黄海（1984年5月21月，6.3级）和射阳（1987年2月17日5.1级）地震前各种震级下降，各个时段的地震分维均未出现低值异常。

华北北部7次中强震例的结果如下。

海城（1975年2月4日，7.3级）地震前5年对$M \geqslant 2.0$，3.0，统计了10个时间序列，其中9个不存在分维，只有1972～1974年时段内$M \geqslant 2.0$地震序列存在分维结构，分维值为0.596，未见震前分维低值异常。

但是，分别统计海城地震序列震前三年，两年，一年三个时段，$M\geqslant2.0$地震序列的分维，它们有由0.730→0.596→0.459的降维过程。特别在震前一年时段内存在$M\geqslant2.0$，3.0级地震时间序列的分维均出现低于0.5的低值异常。这两个震级分别取值0.459和0.440（见图11-8）。

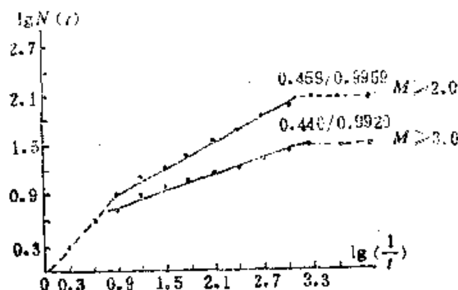



图11-8 小震活动的时间分维

和林格尔（1976年4月6日，6.3级）地震前5年各时段$M\geqslant2.0$，3.0级地震序列共10个，其中5个序列存在分维结构，$M\geqslant2.0$地震各时段分维出现下降过程，并降至0.449。出现震前分维低值异常现象。

唐山（1976年7月28日，7.8级）地震前5年各时段$M\geqslant3.0$，4.0级地震时间序列共10个，其中3个序列存在分维结构，$M\geqslant3.0$地震分维稳定在0.65～0.66，但$M\geqslant4.0$地震震前1973～1975年时段内分维值为0.438，出现低值异常。

巴音木仁（1976年9月23日，6.2级）地震前5年各时段$M\geqslant2.0$，3.0地震序列10个，其中3个存在分维结构，未见分维低值异常；但在$M\geqslant4.0$地震序列，震前1973～1975年时

段内分维出现低值异常，取值0.432。

介休（1979年6月19日，5.1级）地震前5年各时段$M\geq 2.0$，3.0地震序列共10个，其中5个存在分维结构。$M\geq 3.0$级地震序列震前分维出现低值异常，取值为0.402和0.399，但是临震前分维上升至0.650。

五原（1979年8月25日，6.0级）地震前5年各时段$M\geq 2.0$，3.0地震序列共10个，其中7个存在分维结构，$M\geq 2.0$地震序列分维未见低值异常，而$M\geq 3.0$地震序列的分维出现降维现象，到临震前降至0.423，出现了低值异常。

丰镇（1981年8月13日，5.8级）地震前5年各时段$M\geq 2.0$，3.0地震序列共10个，其中7个存在分维结构，均未见分维低值异常。

此外，对强震的前震和余震序列的分维分析得到如下结果。

海城前震，取主震震中附近$20'\times 20'$范围内$M\geq 2.4$，主震发生前两天的地震，计算得到前震序列的分维值为0.432，为低值异常现象。

海城、唐山、溧阳和南黄海四次余震序列的分维值分别为0.67，0.66，0.78，0.66。可见余震序列分维值明显回升。

### 11.5.3 地震预报的新指标

对华北地区165个地震时间序列所作的统计，有87个存在分维结构；对12次中强地震实例中有8次震例震前小震序列时间分维出现低于0.5的低值异常。

海城前震序列的分维值出现低值异常，$D_f=0.432$。海城等4次余震序列的分维值在0.66～0.78之间，明显回升。

表11-3为若干地区震前小震时间分维低值异常。

表11-3 若干地区震前小震时间分维低值异常

| | 震级$M$ | 震前$D_t$ | 余震$D_t$ |
|---|---|---|---|
| 溧　阳 | ≥2.0 | 0.46 | 0.78 |
| 荷　泽 | ≥3.0 | 0.375 | |
| 海　城 | ≥2.0 | 0.459 | 0.67 |
| | ≥3.0 | 0.440 | |
| 和林格尔 | ≥2.0 | 0.449 | |
| 唐　山 | ≥4.0 | 0.438 | 0.66 |
| 巴音木仁 | ≥4.0 | 0.432 | |
| 介　休 | ≥3.0 | 0.402 | |
| | ≥3.0 | 0.399 | |
| 五　原 | ≥3.0 | 0.423 | |

因此，强震前的小震活动时间分维值低于0.5，可能作为华北地区中期地震趋势判断的一个有一定统计意义的前兆指标。但是，研究结果还表明，即使一个时间序列存在分维结构，其值大小还受到震级下限选取和序列持续时间长短的明显影响。由于这些参数选取的不同，同一个震例可能得出不同的结果。所以必须十分细心去统计多种参数的组合，才能获得有意义的结论。

## §11.6 地震的空间分布

我们已经熟知，分维是描述分形对象的一个定量参数，

是系统自相似特性及系统复杂程度的量度。分形体系在一定的标度范围内，其局部与整体在形态、功能、信息和能量等方面具有统计意义上的相似性，适当放大或缩小分形对象的几何尺寸，整个结构并不改变具有标度不变的自相似特性。

近年来，在开展关于自相似断层系统及地震断裂模型等方面研究的基础上，采用简单的计算方法测算了某些地区地震时间、空间和强度（能量）分布的分维。测算结果表明，不仅时间分布和能量分布，而且空间分布在一定的标度范围内都与尺度无关，具有分维结构。

这一节介绍蒋海昆等运用信息维的概念，研究地震空间分布信息维在大震前后所表现的特征。

### 11.6.1 计算方法

从信息维的原始定义出发，有

$$D_1 = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_i P_i \ln(1/P_i)}{\ln \varepsilon} \qquad (11\text{-}10)$$

这个式子已在第三章讨论过，其中$\varepsilon$为覆盖分形体系的小盒子尺寸，即标度值，$P_i$为分形结构落入第$i$个小盒子的概率，求和是对所有非空的小盒子进行的。信息维有其优点，不但考虑所取小盒子是空的，还是非空的，而且考虑不同非空小盒子所提供信息量的大小，尽量反映出分形内部的不均匀特性。

取研究区为一近似矩形区域，此区域以或不以经纬度为其边界均可。视研究区面积为1单位，分别将其长边和宽边

m和n等分。这样，研究区就被划分成m×n个小矩形区，每个小矩形区的面积为

$$\varepsilon = 1/m \cdot n \tag{11-11}$$

标度的极限条件$\varepsilon \to 0$，等同于$m \cdot n \to \infty$。

现在统计每个小矩形区中落入的地震数$N_{ij}$和总地震数$N$，令

$$P_{ij} = N_{ij}/N \qquad (i = 1,2,3,\cdots,m;\ j = 1,2,3,\cdots,n) \tag{11-12}$$

这里$P_{ij}$可以近似视为地震落入某个小矩形区的概率，于是式(11-10)改写为

$$D_1 = \lim_{m \cdot n \to \infty} \frac{\ln \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \ln(1/P_{ij})}{\ln(m \cdot n)} \tag{11-13}$$

式中双重求和只对$P_{ij} \neq 0$的小矩形区进行。具体计算时，令

$$A = \ln(m \cdot n),\ B = \ln \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \ln(1/P_{ij}) \tag{11-14}$$

依次取$m = 2,3,4,\cdots$及$n = 2,3,4,\cdots$，由式(11-14)可得一系列数据点对$(A,B)$，如（ln4，$B(4)$），（ln9，$B(9)$）等。以$A$为横坐标，$B$为纵坐标作图，即$\ln \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} P_{ij} \ln(1/P_{ij})$ $\sim \ln(m \cdot n)$曲线图，如图11-9所示。在此图上，典型的信息维曲线由具有统计意义的三段构成，其中中间直线部分斜率即为所求的信息维$D_1$值，相应的范围为无标度区域，两个拐点$E$和$F$所对应的标度值$\varepsilon_E$和$\varepsilon_F$分别为无标度区的上下限。在无标度域内地震的空间分布是尺度无关的。

在计算中，需要注意以下两个问题：

1° 在$B \sim A$图上，随$m \cdot n(=1/\varepsilon)$的不断增大，当覆盖研究区的小矩形的边长小于地震定位精度时，统计将失去意义。所以要根据实际情况规定小矩形边长的最小值。在这项研究中$\varepsilon_{min}$相应的实际面积不小于0.04平方度，即小矩形的

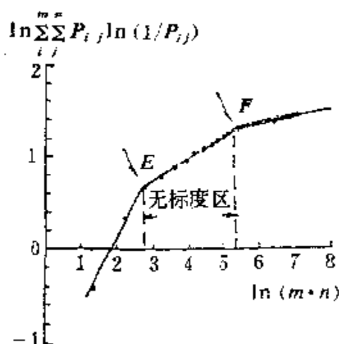



图11-9 地震空间分布的信息维

边长不小于0.2度，约为22km。

2° 标度变换方法，分别用$k^2(k=2,3,4\cdots)$个小矩形覆盖研究区进行统计，当研究区为长和宽相等的正方形区域时，始终有$m \cdot n=k^2$；若研究区为长宽不相等的矩形区域时，由于受到最小矩形边长应大于22km的规定所约束，当$m \cdot n$增大到一定程度之后，$m$或$n$之一将固定，而另一个继续增大，因而有$m \cdot n<k^2$。这样$B \sim A$图上三段结构及其转折点均较为明显，能够准确确定无标度域的上下限。

### 11.6.2 空间分布信息维特征

自从1966年邢台地震之后，华北地区地震监测能力逐步

提高，京、津、唐地区历来又是我国地震的重点监视区域，1969年渤海地震之后，在渤海周围地区也相继建立了一批测震台站，因而70年代以来，所研究的区域具有相当的地震测控能力。这里取1970～1987年为研究时段，研究区的取法是：对唐山地区，取震中周围近正方形的区域，对海城地区，选择长宽比大的矩形，其面积分别约为50平方度。图11-10是唐山地区1970～1974年以来的震级～频率关系曲线。由图可见，曲线大约在$M=2.0$处出现转折，由此确定两个研究区的震级下限为$M=2.0$级。海城地区与此相似。

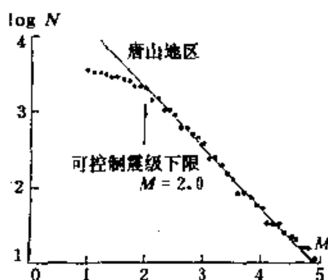


图11-10　震级与频度关系

从所得到的海城和唐山地区不同时段$B\sim A$图，可以看出，绝大部分$B\sim A$图均由三段直线组成，说明地震空间分布具有明显的分维结构。

分析表明，随着大震的临近，即随着孕震系统有序性的进一步增强，系统在更小的尺度内保持标度不变性，存在自相似结构，相应地无标度区变宽；大震之后，随着系统向无序态转变，保持系统自相似性的标度范围相应缩小；而标度范围的变化主要通过无标度域下限的变化来实现，换句话说，无标度域上限较为稳定。这些分析结果尚需深入探讨。

图11-11为唐山地区1970～1987年6月，地震空间分布信息维$D_1$随时间$t$的变化曲线，其平均值为$\bar{D}_1=0.177\pm0.009$，

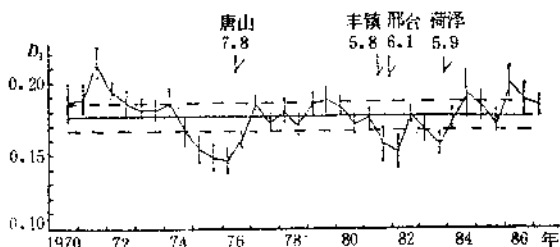


图11-11 唐山信息维随时间变化

从1974年开始，$D_1$逐步降低，1976年7月28日唐山7.8级地震前达到最低值$D_1=0.148\pm0.009$，震后迅速回升，1977年至1981年上半年间一直在均值线附近波动。$D_1$曲线对统计区及外围邻近地区发生的中等强度的地震也有所反映，但$D_1$下降的幅度及持续时间则一般较小。从图11-11看，1981～1984年间$D_1$曲线起伏波动较大，且两次低于平均误差波动范围，与此相对应，在这个时段统计区内外中等强度地震活动增多，相继发生1981年8月13日丰镇5.8级地震，1981年11月9日邢台6.1级地震和1983年11月7日荷泽5.9级地震。其中丰镇、邢台在统计区内，荷泽为外围地区。由于唐山地震后，除已发生的主破裂外，地壳介质仍然比较均匀，而周围环境因素也没有发生改变，因此使得唐山地区地震空间分布信息维$D_1$在大震之后迅速回升。

根据上述测算，得到的主要结论是：地震空间分布存在分维结构，利用不同时段地震空间分布的信息维$D_1$可以较好地描述地震空间分布的不均匀特性及其随时间变化的特征。大震之前2～3年，$D_1$均有一个明显的异常下降过程；大震

后，$D_1$逐步回升，但回升速度有快有慢，取决于大震前后孕震区介质状态，以及对应力场分布有制约作用的周围地体环境在大震前后的改变程度。

# 第十二章　奇异的临界现象

物质从这个相转变成那个相，可以有多种原因：可以是由化学成份的变化，而发生结构的转变，也可以是由于温度的变化或压力的变化，而引起从一个相转变为另一个新相。这种相转变有一个过程，在一定范围内物质的性质只发生量的变化，但是物质的量变发展到一定的程度，物质的状态就要发生质的突然变化；物质发生质变的前后，所具有质的区别的两个状态各称为一个"相"。物质从一个相变到另一个新相的质变过程称为相变。换句话说，相变是指物质状态发生质变。我们举一个大家熟悉的例子，固体材料与温度的关系。随着温度的逐步提高，固体的各种物理性质都会不同程度地发生逐步的变化，这是在同一相内的量变。但当温度达到材料的熔点时，材料将突然熔化，即发生从固体到液体的质变，这就是从一个相（固相）转变到另一个新相（液相）的相变。再举一个大家熟悉的例子，水冷却到0°C，便冻成冰，若升温至100°C，就会沸腾化为水蒸汽。这是典型的物质状态的转变，是相变。

当然，还可以举许多关于物态之间转变的相变例子。然而，不能认为相变就是物态的转变。虽然，凡是物态发生变化都是相变，但是有许多相变并不涉及物态之间的变化。例如，一些晶体材料在高温高压下发生从一种晶格结构转变为另一种晶格结构，是一种相变。但相变前后都是固态，在这

里并不发生物态间的转变。我们知道，石墨质软，具有层状结构，易滑动，可做固体润滑剂，但在瞬时高温高压(2700°C，12万 5 千大气压）下，要发生结构变化，即发生相变，变成目前已知的最坚硬的物质——金刚石。这是一个在同一物态（固态）内发生相变的典型例子。半导体器件和集成电路的研制过程中常遇到固态沉淀现象，例如含Cu的Si，在高温下处理沉淀出Cu的过程，也是一个例子。总之，相变不一定伴随着物态的转变，它比物态间的转变有更广泛的含义。

体系发生相变的物理量，如温度和压力等，分别称为临界温度$T_C$和临界压力$P_C$，表明体系处于临界状态，越过临界点，体系就从一个相转变到另一个新相，所以，相变点也称临界点，是一个奇异时刻，系统处于非平衡状态。

## §12.1 对称破缺

非平衡态系统令人最感兴趣的问题之一是相干性。系统的行为是整体性的，由长程力决定；系统中每个分子都“感知”有关系统状态的“信息”。如化学钟或本纳德实验中，不稳定性打破了空间和时间的对称性，出现对称破缺。

一块处于高温下的磁铁，内部微观磁矩混乱取向，不表现出宏观磁性，当温度降至临界温度，也称居里点，这时突然沿某一方向出现磁矩。但对称性降低了，原来磁铁具有沿一切方向的转动对称，现在只具有沿磁矩方向的转动对称，即产生空间对称破缺现象。

空间和时间的对称破缺在形态发生的迷人现象中可能起着重要作用。人们相信，胚胎完成发育的过程是实现某个计

划的过程。本世纪初，胚胎学家相信，胚胎的发育原因是某种无形的“生命原理”（*Entelechy*）在起作用。观察发现，胚胎在早期阶段能够抵制最剧烈的扰动，能够不顾这些扰动而发育成一个正常的、功能健全的有机体。另一方面，从影片上观察胚胎发育时，可以看到一些跳跃，它们对应于剧烈的重新组织的过程，在跳跃之后是比较平稳的数量增长期。可以推测，这些跳跃就是某些分叉并作出选择的奇异时刻，当局域达到临界值时便出现飞跃，系统进入新的发展阶段，这里也存在逐级分叉的过程。

胚胎学家曾引入形态发生场的概念，设想细胞的分化与它在场中的位置有关。细胞通过某种特征物质的梯度，这是一种或多种形态基因的梯度。梯度实际上是由在远离平衡态条件下的对称破缺不稳定性所产生的。某个化学梯度一旦产生，就会向每个细胞提供一个不同的化学环境，因而引导一组特殊蛋白质的合成。这个模型与实验结果是吻合的。

我们已经知道，无论是整个生物圈，还是它的组成部分（活的或死的），都存在于对称破缺的非平衡条件下。所以，生命远非是在自然秩序之外，而是自组织过程的最高表现形式。

最近已发现化石形式的生命几乎和第一次岩石的形成同时出现。最古老的化石的年代为$3.8\times10^9$年，而地球的年龄据推测为$4.6\times10^9$年；第一批岩石的形成也在$3.8\times10^9$年前。生命如此早就出现！无疑这是一个有力的证据，只要条件许可，就会发生自发的自组织。生命是自发自组织的结果。在对称破缺条件下，自组织过程相当于偶发性和必然性之间，涨落和决定论之间微妙的相互作用。人们期望，在某个

分叉附近，涨落或随机因素起着重要作用，而分叉与分叉之间，决定论或必然性处于支配地位。这些问题的明朗化，还有很长的路要走，需要深入地研究，以得出定量的理论和充分的实验证据。

## §12.2 相变与临界现象的奇异性

自然界有许多奇异现象常常令人迷惑不解，憧憬神往！这里介绍几个已为人们所熟悉的临界现象的奇异性，从中去寻找共有的规律。

### 12.2.1 超导相变

一门学科常常要经历艰难的道路，才能逐步得到发展。超导体研究从1911年荷兰科学家翁涅斯(K Onnes)发现超导体，到1986年缪勒(A Muler)和贝德诺茨(G Bednotz)研制成功超导转变温度为35K的氧化物超导体，——这是一个划时代的事件，为此他们获得1987年诺贝尔物理学奖——整整走过75年不平凡的路程，进入了其发展的黄金时代，在全世界掀起了“超导热”浪潮。几年来，超导体的转变温度从35K提高到90K，又提高到120K，130K，进展速度惊人。

**1．一次科学盛会**

1987年3月18日晚7点半，在美国纽约希尔顿饭店报告厅召开高温氧化物超导体的专题讨论会。下午6点离开会时间还有整整一个半小时，走廊里已被1000多位物理学家挤得满满登登。他们正急切地等待着即将开始的科学盛会。此刻，时间流逝得特别缓慢，但科学家们仍耐心地等待着。当报告

厅开门之后，只几分钟之内，1140个座位的大厅已座无虚席。美国物理学会凝聚态物理部主席阿什克罗夫特（A Ashcroft）介绍了最先的几位专题报告者：美国国际商用机器公司（IBM）苏黎世研究所缪勒，日本东京大学田中（S Tanaka），美国休斯敦大学朱经武，中国科学院物理研究所赵忠贤和美国贝尔实验室巴特罗格（B Batlog）。与会者报以雷鸣般的掌声。这时走廊里又增加了几百位物理学家。他们一直站在那里倾听每篇5分钟的研究报告，而更多的人则在门厅里通过显示屏观看会议的实况。讨论会持续了8个小时，到凌晨3点15分才结束。会上讨论热烈，气氛活跃，各抒己见，针锋相对。但科学家们对超导转变温度高达90K已深信无疑了，并为新一代先进技术即将到来而激动不已。

盛会后，各国在超导体研究方面的步伐更加快了。一个探寻高温超导体，并开拓其应用前景的科技攻关战在世界范围内深入展开，人们期待着更丰硕的研究成果。

**2. 超导体的发现**

荷兰科学家翁涅斯，于1911年在液氦温度下对水银的电阻进行测量时，发现在4.2K（液氦的正常沸点温度）时水银的电阻在百分之几度的范围内骤然降到一个很小的数值（图12-1），以至于是当时难以准确测量的数值（$10^{-5}\Omega$）。他以为是由于水银通过蒸馏提纯而表现出来极小的电阻。当他在水银中加入大量杂质后，但对其在液氦温度下向极小电阻状态转变并没有发生什么影响。这表明在低温下某些固体电阻趋于零是这些固体固有的物理性质。翁涅斯于1913年首次称这种状态为超导态。

固体物质在某一低温下，从正常态转变为超导态，定义

超导态出现的温度为临界温度$T_c$。这是一个奇异时刻，当温度降到临界温度$T_c$时，电阻降为零，超导电状态立即到来。许多超导体在零电阻到达之前，随着温度的下降电阻逐渐减小，最后才出现零电阻。所以常常还定义电阻发生明显下降的温度为转变温度。

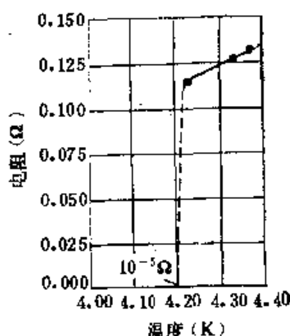



图12-1　水银超导转变

自从70多年前发现超导现象以来，各国物理学家都在孜孜不倦地探寻高临界温度的超导体。已相继发现26种金属元素和几千种化合物具有超导电性。

翁涅斯发现超导体的零电阻特性后不久，又发现磁场或流过超导体的电流能破坏超导电性，使样品的电阻恢复到正常的数值。定义使样品恢复到正常电阻值的最小磁场为临界磁场$H_c$。临界磁场$H_c$随着温度$T$发生变化，其规律近似于抛物线关系

$$H_c = H_{c0}[1 - T^2/T_c^2] \qquad (12\text{-}1)$$

式中$H_{c0}$是0K时的临界磁场。

1973年美国西屋实验室格瓦勒(R Gavaler)在利用溅射技术制备的$Nb_3Ge$薄膜中测得临界温度$T_c=23.2K$。这个结果是超导电性发现62年后取得的最好结果。超导体能在液氢温度下工作，一直是物理界的追求。经过62年的不懈努力，终于获得高于液氢正常沸点(20.4K)的超导临界温度，理所当然引起巨大的震动。但此后13年未能突破此记录。可见探

寻高临界温度超导体的道路是多么艰难曲折。

要特别指出的是，零电阻特性只是超导体的基本特性之一，而不是唯一的特性。因为如果零电阻是超导体最根本的特性，那就是说超导体是一种理想导体。因此，若把固体样品置于磁场（$H<H_c$）中冷却到出现超导态，然后去掉磁场，则在超导体中应有一个“冻结”磁场。但事实并非如此。德国物理学家迈斯纳（W Meissner）和奥森费尔德（R Ochenfeld）于1933年所进行的著名实验表明，当样品进入超导态后，超导体立即把磁力线完全排斥出体外，样品内部的磁感应强度为零，也就是说超导体是理想的抗磁体，具有完全抗磁性。这就是迈斯纳-奥森费尔德效应。

这样，零电阻与完全抗磁性成为超导体的两个基本的宏观判据。

3．突破性进展

贝德诺茨和缪勒改弦更张另辟蹊径，抛开铌三锗（$Nb_3Ge$），转向对金属氧化物进行研究，于1986年4月研制成功钡-镧-铜（Ba-La-Cu）体系金属氧化物，实验观测到转变温度为35K。这是超导体研究在冷落了13年后，取得的第一个突破性进展！

数十年来，超导体研究在提高转变温度方面的每一个即使是很小的进步，都会引起巨大的反响和加倍的重视。这是因为人们一直渴望着超导体在工程技术上的广泛应用有朝一日成为现实。所以，当得知超导体转变温度从23.2K提高到35K的消息后，整个物理界、化学界、材料界和工程技术界，实际上是全世界都被震惊了！而后，一个科学上的竞争热潮全面展开。

由于超导材料中含有昂贵的稀土元素，因此，推广应用将受到限制。于是一些实验室先后开发以其它元素取代材料体系中稀土元素的研究。目前，不含稀土元素氧化物超导体BiSr $Cu_2Oy$和$TlBaCu_2Oy$的超导转变温度已高于液氮温度。后者零电阻温度高达120K，出现抗磁性温度也在120K。科学家又向更高的温度进发，并将不断向人们展示超导体的工程技术应用前景。

4．超导相变

实验表明，当温度处于0到临界温度$T_c$之间，即$0<T<T_c$时，从超导态转变到正常态的相变，是吸热过程，反之，从正常态转变到超导态的相变是放热过程。这两个过程的特征都是伴随着潜热（相变热）的释放和吸收。这种相变称为一级相变。

但是，在临界温度$T_c$，临界磁场$H_c=0$时，超导相变伴随着比热的突变，随着温度的下降，超导比热$C_{es}$很快减小到正常态比热$C_{en}$之下，$C_{es}$大体上同$T^3$成正比。

在临界温度$T_c$，正常态和超导态的熵是相等的；但是，随着温度的下降超导态的熵明显降低，总比正常态小，这说明超导态比正常态有更高的有序度，因为熵是一个系统无序度的量度。在正常态处于激发态的电子在超导态全部或部分地成为有序的。这使人相信，超导态是由于电子以某种方式组织起来，是一个有趣的自组织过程。这种相变不伴随潜热的释放或吸收，而比热发生跳变，不是一级相变，而是二级相变。

### 12.2.2 铁磁体相变

有一类物质，如Fe，Co，Ni，Gd等元素及其合金，在一

定温度下，随着外加磁场$H$的加大磁化强度$M$增大，在不强的外加磁场下即可达到饱和磁化，而且磁化强度很大。在某一临界温度以下，即使不存在外磁场，材料中也存在自发的磁化强度。这种物质的磁化率$\chi$特别大。

铁磁物质的磁化强度随温度发生变化，存在一个转变温度，温度升高时，磁化强度减小，当温度$T$高于某一特定的临界温度$T_c$时，铁磁性消失，转变为顺磁性，$T_c$称为居里温度。顺磁性物质是沿着外加磁场方向产生磁化的物质。

当$T>T_c$时，铁磁性物质变成顺磁性物质，磁化率$\chi$与温度$T$的关系为

$$\chi=C/(T-T_c) \tag{12-2}$$

这就是著名的居里-外斯定律（Curie-Weiss *Law*）。铁磁体的$T_c$很高，如Co为1394K，Fe为1044K。

外斯提出著名的分子场理论，解释了铁磁性的产生及其向顺磁性转变的机理。假定铁磁性物质中含有许多小的区域，即使不存在外加磁场，它们自身就具有磁化强度，称为自发磁化强度$M_S$。整块铁磁体的磁化强度$M$由各小区域磁化强度$M_S$的矢量相加。由于各小区域的自发磁化强度矢量混乱取向，所以其矢量和一般为零。当加上外磁场时，各小区域的自发磁化强度矢量将逐渐趋于一致的方向，因而表现出总的磁化强度。

具有自发磁化强度的小区域称为磁畴。

两相邻磁畴之间的过渡并非是突变式的，而是存在一定厚度的过渡区域。就是说在晶体中磁化方向相反的两相邻区域之间自旋方向的改变不是突然发生在某一原子面上，而是通过$N$个原子自旋逐步地连续地实现自旋转向的，如图12-2

所示。可见自旋的转向跨越许多原子面，这些原子面构成两磁畴间的过渡区，成为隔开两相邻而磁化方向不同的磁畴之间的疆界，称之为磁畴壁。在铁中，磁畴壁厚度大约为300个点阵常数。

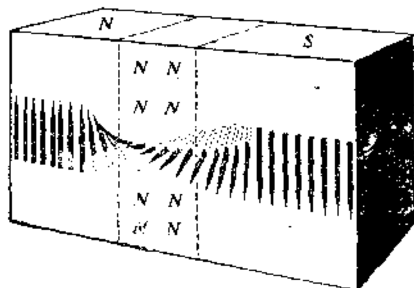



图12-2 磁畴壁

磁畴内的自发磁化，是由于晶体中存在分子场的缘故。在分子场作用下，铁磁体的各小区域中各原子磁矩克服热运动的影响，而趋向于互相平行取向，因而产生自发磁化。当温度升高时，热运动对各原子磁矩平行取向的扰乱加强，当温度升高到某一临界值，即居里温度$T_c$时，由于分子的无规则运动加剧，因此分子场对各原子磁矩的平行取向起到完全的破坏作用，则铁磁性物质便转变为顺磁性物质。

中子散射实验已能观测到铁磁体内部微观磁矩如何排列。实际上各磁畴间没有明确的边界，此起彼伏，若隐若现，相互嵌套。小区域的平均尺寸称为关联长度，记为$\xi$。当温度逐渐接近临界温度时，$\xi$逐渐增大，直至达到宏观长度。此时体系具有自相似性结构（图12-3）。已经发展一套临界指数来定量刻画临界现象，有$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta$、$\nu$、$\eta$。

让我们来考查一下这些临界指数，$\nu$称为关联长度指数，



图12-3 磁畴在临界点附近的分形性

与关联函数$G(r)$和关联长度$\xi$有关。关联函数为

$$G(r)=\langle S(r)S(0)\rangle-\langle S(r)\rangle\langle S(0)\rangle \qquad (12\text{-}3)$$

式中平均量$\langle S\rangle$为磁化强度$M$，$\langle S\rangle=M$，$G(r)$反映了两个 相距为$r$的自旋涨落之间的关联情况，与关联长度$\xi$有如下关系

$$G(r)\propto\frac{1}{r}\exp(-r/\xi) \qquad (12\text{-}4)$$

在临界点附近，$\xi$与温度的关系为

$$\xi\propto|T-T_c|^{-\nu} \qquad (12\text{-}5)$$

当温度$T$趋近临界温度$T_c$时，$\xi$趋于无穷，式中$\nu$与体系分维$D_f$有如下关系

$$D_f=\nu^{-1} \qquad (12\text{-}6)$$

在$T=T_c$时，$G(r)$按幂次律衰减

$$G(r)\propto r^{D_f-d} \qquad (12\text{-}7)$$

式中$d$是欧氏空间维数。

体系具有标度不变性，可以导出各临界指数之间的关系

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=2, & \alpha+\beta(\delta+1)=2\\ \alpha+\alpha\nu=2, & \gamma=(2-\eta)\nu\end{cases} \qquad (12\text{-}8)$$

在临界点附近出现突变的奇异现象，从超导相变和铁磁相变的事实已可见一斑了。表12-1是临界指数实验值。

表12-1　铁磁体的临界指数实验值

| 铁磁体 | 对称性 | $T_c$(k) | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fe | 各向同性 | 1044.0 | −0.120<br>±0.01 | 0.34<br>±0.02 | 1.33<br>±0.015 | | 0.07 |
| Ni | 各向同性 | 631.55 | −0.10<br>±0.03 | 0.33<br>±0.03 | 1.32<br>±0.02 | 4.2<br>±0.1 | |
| $Fe_2O_3$ | 单　轴 | 643 | | 0.354<br>±0.005 | 1.33<br>±0.04 | | |
| Gd | 各向异性 | 292.5 | | | 1.33 | 4.0<br>±0.1 | |

从表中可见，实验上测量的不同体系的临界指数的数值非常接近，表明在临界点附近，不同体系的个性退居次要地位，而共性突出了，不同体系的共性明显地表现出来，因为铁磁体的不同体系具有相同的临界指数和临界行为。

### 12.2.3　晶体的形核生长

结晶过程是一种相变。相变不是在系统中每一点同时发生的，而是首先在系统的某些小区域内开始形成新相，然后才从这些小区域扩展到整体。新相形成的小区域称为核。上述的第一个过程为形核过程，第二个过程为新相的成长过程。相变的系统中，每单位体积在单位时间内形成核心的数目称为成核率；新相在单位时间内的线性生长速率称为生长率。显然，相变速率与成核率和新相生长率直接有关。

固体物质（例如金属）在熔点$T_m$时，液相与固相的自由能相等，处于平衡状态。当温度低于熔点时，液相自由能高于固相自由能。此时液态要转变成固态，使系统的自由能降

低，即要发生相变。

在液相中，由于能量涨落，可能有少数分子（原子）聚集成凝聚团，凝聚团有继续成长为晶体的可能性，也有瓦解重新成为单个液态分子的可能性。那些能够进一步成长为晶体的凝聚团称为晶核。这里要考虑形成晶核过程中自由能的变化和晶核的临界尺寸。

如果凝聚团与液相之间单位界面的表面能为$\sigma_{sl}$，从液态形成单位体积凝聚团时自由能的改变量为$\Delta G_v$。假设凝聚团呈球形状，则在一定温度和压力下，形成半径为$R_n$的球形凝聚团时，自由能的改变为

$$\Delta G = \frac{4}{3}\pi R_n^3 \Delta G_v + 4\pi R_n^2 \sigma_{sl} \qquad (12\text{-}9)$$

在熔点$T_m$以下，$\Delta G_v$恒为负值，当$R_n$很小时，形成凝聚团所放出来的能量不足以供应表面能的需要，因而解体；当$R_n$大于某一临界值$R_n^*$后，凝聚团的成长反而放出能量。临界晶核半径$R_n^*$可由$\partial\Delta G/\partial R_n = 0$导出：

$$\frac{\partial \Delta G}{\partial R_n} = 4\pi R_n^2 \Delta G_v + 8\pi R_n \sigma_{sl} = 0$$

所以，临界晶核半径为

$$R_n^* = \frac{2\sigma_{sl}}{-\Delta G_v} \qquad (12\text{-}10)$$

将式（12-10）代入式（12-9），就得到形成临界晶核时自由能的改变量$\Delta G^*$为

$$\Delta G^* = \frac{16\pi\sigma_{sl}^3}{3\Delta G_v^2} \qquad (12\text{-}11)$$

也称$\Delta G^*$为晶核的形成能。

我们又一次看到临界现象的奇异性，只有那些半径等于或大于临界半径的晶核($R_s \geqslant R_s^*$)才能生长形成晶体。在这里晶体中的每一个原子(分子、离子)似乎都是有“知觉”的，它们会各自在复杂的晶格骨架中寻找到自己的位置。原子自组织现象在晶体生长过程中表现得异常生动。

### 12.2.4 相变的一般规律

相变的起因各异，表现形式多样。但在相变点附近的行为却都极为相似。根据热力学基本原理，可以按化学势$\mu$及其导数，对自然界中存在的千差万别的相变进行分类。有一类相变的特征，是相变前后的两相化学势$\mu$不变，但$\mu$对温度$T$和压力$P$的导数发生变化，即摩尔分子熵不相等，$S_1 \neq S_2$，摩尔分子体积也不相等，$V_1 \neq V_2$。即有

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial P} \neq \dfrac{\partial \mu_2}{\partial P}, \text{ 即} V_1 \neq V_2 \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial T} \neq \dfrac{\partial \mu_2}{\partial T}, \text{ 即} S_1 \neq S_2 \end{cases} \qquad (12\text{-}12)$$

这种相变伴随着潜热的释放或吸收，体积和熵发生变化，称为一级相变。如金属的熔化，液体的蒸发和上面已讨论过的，在临界温度$T_c$以下，超导态→正常态的相变以及正常态→超导态的相变，皆为一级相变。

除了一级相变外，实验还发现另一类相变，如上面讨论的实例中铁磁体与顺磁体的相变，在临界温度，正常态与超导态的相变，HeI与HeII间的相变等都属于同一种相变。这种相变不同于一级相变，没有潜热的释放或吸收，体积和熵

在相变点都相等，但物质的比热$C_P$，膨胀系数$\alpha$和压缩系数$K$发生突变。称这种相变为二级相变，其特征为

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial P} = \dfrac{\partial \mu_2}{\partial P} & \text{即} V_1 = V_2 \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial T} = \dfrac{\partial \mu_2}{\partial T} & \text{即} S_1 = S_2 \\ \dfrac{\partial^2 \mu_1}{\partial T^2} \neq \dfrac{\partial^2 \mu_2}{\partial T^2} & \text{即} C_{P_1} \neq C_{P_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mu_1}{\partial T \partial P} \neq \dfrac{\partial^2 \mu_2}{\partial T \partial P} & \text{即} \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \dfrac{\partial^2 \mu_1}{\partial P^2} \neq \dfrac{\partial^2 \mu_2}{\partial P^2} & \text{即} K_1 \neq K_2 \end{cases} \tag{12-13}$$

还发现存在三级相变，一般地说，$n$级相变的特征是相变前后两相化学势及其$1, 2, \cdots, (n-1)$级偏导数所代表的性质全相同，但$n$级偏导数所代表的性质不相同。这样，可以把相变分为两类，即一级相变和高级相变。对化学势的一级偏导数所代表的性质来说，高级相变为连续相变，在相变中这些性质不发生变化。

在临界点上，体系具有分形结构，不存在唯一的特征尺度，小到原子尺寸，大到关联尺度，各种尺度的涨落都起作用，如存在电子、原子、离子、分子和高分子链等具体物质单元，形成多体问题。重整化群方法是解决多体问题的有效途径。

## §12.3 重整化群方法

重整化群方法，是70年代以来为了解决统计物理中的连续相变而发展起来的数学方法，1974年首先由威尔逊（G Wilson））提出来，由于他对二级相变理论作出重大贡献，获得1982年诺贝尔物理学奖。

当体系处于临界状态，关联长度趋于无穷大。既然是无穷大，那么人们用什么尺度（标度），无论是大还是小，都是无穷大。由此产生标度不变性，人们能够对体系的尺度作标度变换，而不影响其性质。换句话说，当人们用新的尺子(缩小或放大）重新度量空间长度时，体系的性质不变，这就是标度不变性。

考虑一个点阵，其点阵常数为$a$，格点上的某物理量为$P$，当将尺度$a$变为$2a, 3a, \cdots\cdots$时，在物理上相当于把点阵模型改变为原子团模型，相对应的物理量为$P_i(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$。这就是标度变换。现在要问，物理量$P_i$与$P$之间的关系如何？威尔逊假定，$P_i$与$P$之间有非线性关系

$$P_i = T_{i+1}(P) \qquad (i=1,2,3,\cdots) \qquad (12\text{-}14)$$

这就是说，存在变换元$T_i$，使得

$$T_i \cdot T_j = T_{i+j}, \quad T_1 = I \qquad (12\text{-}15)$$

在一般情况下，变换元$T_i$不存在逆变换$T_i^{-1}$，则$\{T_i\}$构成一个半群。称半群$\{T_i\}$为重整化群。

重整化群理论的一个重要定理是认定不动点存在定理成立，即如果极限

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P^* \qquad (12\text{-}16)$$

存在，则有

$$P^* = T(P^*) \qquad (12\text{-}17)$$

成立。虽然，这个不动点定理至今未被证明，但物理学家们在应用重整化群方法时，均承认这个定理。

重整化群方法的基本步骤，是把点阵模型归并为集团模型的粗粒平均和标度变换。以统计物理学中一个著名的理论模型——伊辛(Ising)模型为例，把一个$d$维自旋系统中每$S^d$个自旋格点归并为一个集团自旋，这就是粗粒平均。粗粒平均之后，系统以集团自旋构成有效晶格，其晶格常数扩大了$S$倍（图12-4）。

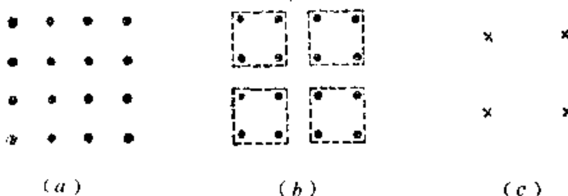


图12-4　自旋归并

（$a$）自旋格点；（$b$）4个自旋格点归并为一个集团自旋；（$c$）集团自旋的有效晶格

假定以集团自旋系统的晶格常数作为长度单位，则图12-4所作的归并过程，就相当于把量度长度的尺寸放大了$S$倍，这就是重整化群方法中的标度变换概念。在伊辛体系的相变中，重要的参量是最近邻自旋之间的耦合常数$J$与温度$T$的比值

$$K = J/K_BT \qquad (12\text{-}18)$$

式中$K_B$为玻尔兹曼常数。对铁磁相变，从无序顺磁相到有序铁磁相的转变，实际上是互作用能量$J$与热运动能量$K_BT$之间的竞争过程。有序态起因于关联作用，无序态则溯源于热运动。所以，大的$K$值对应于有序铁磁相，小的$K$值则对应于无序顺磁相，相变则发生在$K$的临界值$K_c$。在伊辛模型中，格点$i$上的自旋$\sigma_i$有两个相反的取值方向，记为$\sigma_i=\pm1$。考虑最近邻自旋的相互作用，则能量为

$$E(\sigma)=-J\sum_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{12-19}$$

当耦合常数$J$趋于临界值$J_c$时，关联长度$\xi$为

$$\xi(J)\propto(J-J_c)^{-\nu} \tag{12-20}$$

式中$\nu$为临界指数。经过一次粗粒平均后，产生有效晶格（图12-4(c)）。有效晶格的集团自旋之间的最近邻相互作用，需要引入新的耦合常数$J_1$，与原来的耦合常数$J$有函数关系

$$J_1=f(J) \tag{12-21}$$

由于标度扩大了$S$倍，所以相应的有效关联长度缩短了$S$倍，有

$$\xi(J_1)=\xi[f(J)=\xi(J)/S \tag{12-22}$$

还可以进行新的一次归并，如此重复进行至第$n$次归并，则得到

$$J_n=f(J_{n-1})\quad \xi(J_n)=\xi(J_{n-1})/S \tag{12-23}$$

当系统进入临界状态时，$J=J_c$根据不动点定理式(12-17)有

$$J_c=f(J_c) \tag{12-24}$$

式中$J_c$为重整化变换的不动点。

根据式（12-20）和式（12-24），有

$$\begin{cases}\xi(J_{n-1})\propto(J_{n-1}-J_c)^{-\nu}\\ \xi(J_n)\propto(J_n-J_c)^{-\nu}=[f(J_{n-1})-f(J_c)]^{-\nu}\end{cases}\tag{12-25}$$

由此式，有

$$\frac{\xi(J_n)}{\xi(J_{n-1})}=\left[\frac{f(J_{n-1})-f(J)}{J_{n-1}-J_c}\right]^{-\nu}=\lambda^{-\nu}\tag{12-26}$$

考虑到式（12-22），有$\lambda^{-\nu}=1/S$，即

$$\nu=\ln S/\ln\lambda\tag{12-27}$$

实际上$\lambda$是函数$f$的导数

$$\lambda=f'(J_c)\tag{12-28}$$

这样，我们通过临界指数$\nu$的计算，进而得到分维$D_f=1/\nu$。

## §12.4 渗　流

渗流现象在自然界广泛存在。人体和动物体内存在多种多孔结构的器官，如肺，心、肝和肾等，液体在其中的流动；植物的茎、枝、根和叶等，也是多孔结构，液体在其中的流动；多孔岩石和砂土中石油和水的流动。这些都是渗流现象。

渗流概念作为描画流体在随机介质中运动的数学模型，是1957年首先由布罗德本特（K Broadbent）和哈梅斯利（M Hammersley）提出来的，是概率论的一个分支。

### 12.4.1 渗流与扩散

以1维介质为例来说明，如图12-5所示，用一系列点子代表这种介质。气体或液体粒子可以沿这些点子运动。图12-5

(*a*) 为扩散过程，流体粒子到达一点后，下一步的运动方向是完全随机的，粒子向左或向右运动的几率相等，与介质的性质无关。图中表示出开始10步的可能路径。可以看出，在扩散过程中，流体是主动的，而介质则是被动的。图12-5(*b*)是渗流过程。流体粒子到达介质的一点后，下一步的运动方向与介质的结构有关。图中表示出每一点允许的运动方向，粒子只能按允许的方向运动。图中标出开始10步的运动情况。可以看出，渗流过程中，介质的结构特点起决定作用，流体被定域于一个陷井中。在高维的情况下，流体将在渗流结构介质中无限延展，形成分形结构。

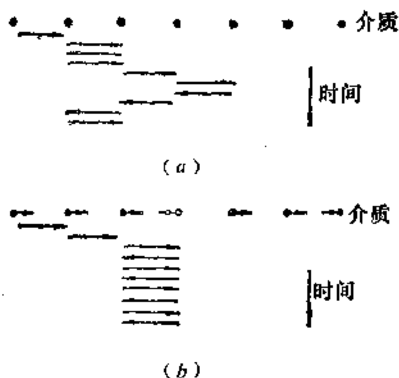



图12-5 1维渗流与扩散

(*a*) 扩散 (*b*) 渗流

### 12.4.2 渗流临界值

为了证明渗流现象的产生过程，下面来观察一个实验。

图12-6是实验装置，在一个玻璃容器中无规则地放入大小相同的白色玻璃球和黑色金属球，容器上下各置一电极，并与电源和电流表相串联。设金属球所占的比例为$P$，则玻璃球占的比例为$1-P$。当$P$较小时，金属球只可能形成一些很小的孤立集团，不可能形成电流通道。逐渐增多金属球数目，而其在容器中的分布仍是完全无规的，当金属球的比例达到$P=0.27$时，回路导通，开始出现电流。这是因为在容器中形成延展的具有分形结构的导电集团。此时$P=P_c$，称$P_c$为渗流临界值。无疑，这可以看成是相变点。

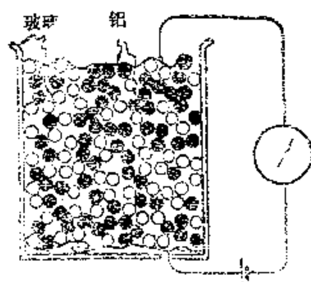


图12-6　渗流实验示意

渗流模型有：点渗流，键渗流和点键混合模型。其中点渗流模型是应用最多的。图12-7点渗流和键渗流示意图。前者考虑格点是否被占据。后者考虑格点间的联线，即键是否被占据。

### 12.4.3　渗流临界指数

这里仍以1维为例来讨论，所归纳出来的计算步骤也适用其它维数。假定有一线性链，由一系列格点构成链，有一流体流动其中。每一个格点有两种状态，或被占据，或空格，分别用叉和小圆圈表示。只有被占据格点流体才能通过。

现在用重整化方法计算临界指数，其步骤为：

**1. 集团归并**

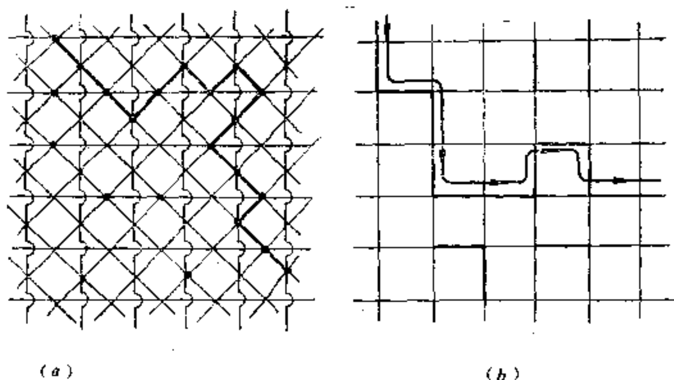
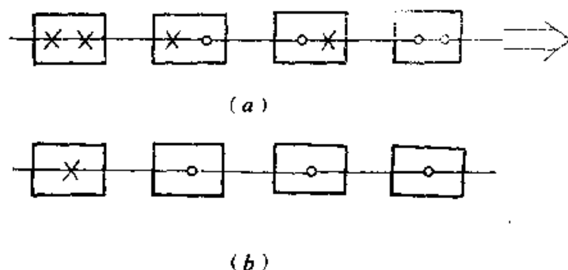



图12-7　渗流模型
(a) 点渗流；　(b) 键渗流

利用图12-4的归并方法，把线性链归并成若干集团自旋，每个集团自旋有$S^d$个格点。这里$S$是集团的边长，$d$是空间维数。对图12-8线性链，$S=2, d=1$，即把相邻的两个格点归并为一个集团。




(b)

图12-8　线性链集团归并

**2. 集团导通概率计算**

原来的格点组态归并为集团组态后，要作出规定，在1维

链的情形中，只有集团中每个格点都被占据时，流体才能顺利通过集团。集团只要有一个格点空着，流体就不能通过。所以集团导通概率$\mathscr{P}$为集团中各单个格点导通概率的乘积。$\mathscr{P}$是$P$的函数，并与集团尺寸$S$有关，故记为$R_s(P)$。$R_s(P)$可能有复杂的形式，但在一维情况下有简单的形式

$$\mathscr{P}=R_s(P)=P^2 \qquad (12\text{-}29)$$

则集团不导通概率为

$$Q=1-\mathscr{P}=1-P^2 \qquad (12\text{-}30)$$

称$R_s(P)$为重整化变换，表明其将格点的导通概率变换为集团的导通概率。$\mathscr{P}$也可以写成

$$\mathscr{P}=\sum\eta_i P_i \qquad (12\text{-}31)$$

式中$P_i$是集团各格点的概率，$\eta_i$是相应的权重函数，

$$\eta_i=\begin{cases}1, & \text{当格点被占据}\\ 0, & \text{当格点空格}\end{cases} \qquad (12\text{-}32)$$

式（12-31）中求和是对集团各格点的可能状态进行的。对图12-8，有

$$\mathscr{P}=1\cdot P\cdot P+0\cdot P\cdot q+0\cdot q\cdot P+0\cdot q\cdot q=P^2$$

其中$q$是格点为空格时的概率，每一项表示$S=2$时，各集团可能具有的状态概率。

3. 不动点确定

由不动点定理式（12-17），有

$$R_s(P^*)=P^*=P^{*^2}$$

求解方此程，有两根，$P_1^*=0$，$P_2^*=1$。其中$P_1^*=0$为稳定不动点，$P_2^*=1$为不稳定不动点，如图12-9所示，后者为临界点。

4. 临界指数与分维

由上述结果，有

$$R_s(P) = P^2$$

根据式（12-28），有

$$\lambda = \left.\frac{\mathrm{d}R_s(P)}{\mathrm{d}P}\right|_{P^*}$$

$$= 2P^* = 2$$

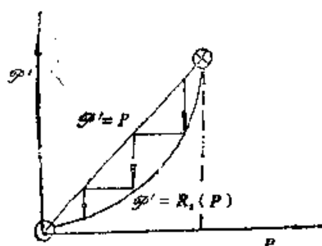


图12-9 重整化变换的不动点

利用式（12-27），有

$$\nu = \frac{\ln S}{\ln\left(\frac{\mathrm{d}R_s(P)}{\mathrm{d}P}\right)_{P^*}} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

于是我们得到1维渗流的关联临界指数$\nu$值，与实验值相符合。分维$D_f$与$\nu$有倒数关系，所以$D_f = 1$。

利用重整化变换方法同样可以计算其它维数的渗流临界指数和渗流分维值。

## §12.5 纳米材料的渗流模型

纳米材料是一种新型的材料，由于结构特殊，具有一系列不寻常的特性，而受到科技界的关注。

纳米材料的诞生构思于一次孤独的旅行之中。10年前的一天，一位德国物理学家驾驶汽车，孤单一人跨越澳大利亚大沙漠。寂静、荒寞和孤独使他头脑格外清醒活跃。正象他在生活中充满冒险和创新精神一样，在科学上他同样立意创新，开辟新领域。他就是德国萨尔兰大学教授格莱特（H Gleiter)。此时，他正思索着长期萦绕脑际的一个问题：如

何制备出一种异乎寻常的新材料？格莱特想到，在以长程有序为特征的晶体研究中，人们把空位、填隙原子、位错、晶界和相界看为缺陷，而视完整晶体为主体。如果从完全相反的方向考虑问题，把缺陷作为主体，制备出一种缺陷占相当大的体积比的材料，那么世界会变成什么样？也就是说，如果制备成功具有大量晶界的材料，以至于晶界所占的体积百分比与晶体部分相当，从而生产一种新的无序组态，是否是新材料研究的突破点呢？

格莱特回到德国后，立即着手这项开创性的新材料研究，经过4年的艰苦研究，于1984年制备成功尺寸在10nm以下的铁、铜和金超微粒黑色粉末。任何金属颗粒在几个纳米以下都呈黑色。纳米材料就这样诞生了。

### 12.5.1 方法与非寻常特性

制备纳米晶体的方法有多种，目前制备金属纳米材料的方法是惰性气体淀积和原位加压法。即将原始材料在约1KPa的惰性气体的气氛中蒸发，蒸发出来的原子与惰性气体的原子相互碰撞，并淀积在冷阱上(～77K)，形成尺寸约几纳米的松散粉末，然后将粉末收集在专门的装置中，在超高真空条件下，加高压(～5GPa)成型，就得到纳米金属材料。半导体(硅、氧化锌)纳米材料，是通过等离子体化学气相淀积法或溅射法获得，与金属纳米材料不同，是直接形成薄膜纳米材料。

纳米材料具有很大浓度的晶界组份，这是在压实过程中由晶粒表面转变而成的。当超微晶粒尺寸为5nm时，材料中会有$10^{19}/cm^3$个晶界，晶界组份即为这$10^{19}/cm^3$个不同结构晶

界总和。由于所有这些晶界中原子间距不同，从统计平均来说，不同界面原子间距中不存在择优的原子间距。总之，晶界组份可能是既无长程序，又无短程序的固态结构，是一个新的固体状态。晶界与纳米晶粒各占50％。因此，这种物质可以认为包含两种结构组元：长程有序的纳米晶粒和无序的晶界。格莱特称晶界组份为“类气体”结构。

实验表明，铜的纳米晶体材料(8nm)在110～293K之间的平均热膨胀系数$\alpha=3.1\times10^{-5}K^{-1}$,这比单晶铜($\alpha=1.6\times10^{-5}K^{-1}$)增大一倍。纳米晶体铁 $\alpha$-Fe(6nm) 的饱和磁距下降约一倍；而断裂强度比多晶铁提高了12倍，硬度提高2—3数量级。纳米铜的同位素($^{67}Cu$)自扩散表明，自扩散系数比晶格扩散增大了$10^{19}$倍！比晶界扩散提高约100倍。一个令人感兴趣的工程技术结果是在陶瓷中得到的，在普通状态下脆性的陶瓷，当利用纳米晶体技术制备成纳米陶瓷时，则具有韧性，如$TiO_2$纳米陶瓷在室温下可以弯曲，塑性形变高达100％。研究工作还处于初期，其优异特性随着研究工作的深入将逐步被揭示出来。

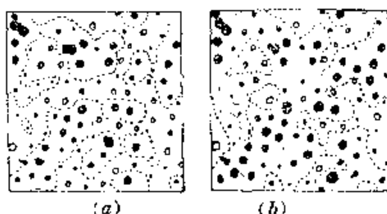
### 12.5.2 渗流模型

对无序固体受压缩时局域结构和局域应力涨落的研究中，埃伽米(T Egami)等人引入一组原子层次内应力来描述原子的局域环境，定义第$i$个原子的局域应力为

$$\sigma_i^{\alpha\beta}=1/2\Omega_i\Sigma f_{ij}^{\alpha}r_{ij}^{\beta} \qquad (12\text{-}33)$$

式中$\alpha$，$\beta$表示笛卡尔分量，$\Omega_i$为局域原子体积，$f_{ij}^{\alpha}$及$r_{ij}^{\beta}$为第$i$个和第$j$个原子间的应力及间距矢量。根据埃伽米计算，给出在64MPa和2.84GPa压力下无序固体各原子所受正应

力的分布图（图12-10）。图中每个圆表示一个原子，其面积代表所受正应力的绝对值，以实心圆及空心圆分别表示该原子受到压应力与拉应力。局域应力的空间分布与变化，反映如下的物理图像：受局域压应力和局域张应力的原子按集团方式发生聚集，构成拉压小区相互镶嵌的组态。这就是受压过程无序固体形成具有分形特征的局域压应力渗流集团模型。当外加压力增大时，受压原子的局域区域增大，由受压原子构成刚性骨架变大，而每个原子上的压应力并不明显增加。此模型可以解释纳米材料的力学特性，并可计算体系的分维。



(a)　　(b)

图12-10　纳米材料局域应力分布

(a) 64MPa；　(b) 2.84GPa

## §12.6　非晶态半导体中的分形结构

发生在无序体系中的许多物理现象应用分形论可以在机制上给出某些诠释，已被若干研究工作所证实。通过计算机模拟，已经建立若干关于分形结构的模型，其中扩散限制凝聚(DLA)模型是很成功的模型之一。

氢化非晶态硅($a$-Si:H) 薄膜作为一种新型光电子薄膜材料，近年来发展很快。薄膜材料的晶化问题是许多研究者

所关心的。其原因是这是一个很复杂的问题，因为可存在差异颇大的晶化因素。同时，要从实验上描示晶化过程的细节，也有困难：未能提供建立$a$-Si:H薄膜晶化机制的充分实验证据。

因此，必须寻找解决问题的新思想和新方法。最近，麦克劳德(D-Mcleod)和卡德(C Card)提出，分形理论在无序半导体研究中，可以提供有用的选择方案。特别是应用于氢化非晶硅光电导率和电子态密度的分形行为的分析中。但至今未见利用分形理论分析$a$-Si:H薄膜晶化过程的显微形貌。这里，把若干初步的研究结果介绍给读者。其程序要点是，对$a$-Si:H薄膜结构弛豫与相变的显微图像，进行光电转换，A/D转换和数字计算，以获得微结构细节，通过分形理论阐明$a$-Si:H薄膜晶化点的微结构形态，成份和分维，进而讨论分形凝聚的可能机理。

事实上，$a$-Si:H薄膜的晶化过程是一个早已被关注的问题，研究工作采用静态方法。而对$a$-Si:H薄膜的晶化凝聚过程作原位动态观察是一种直观可靠的研究方法。但实验技术有明显的困难。这一节介绍$a$-Si:H薄膜在原位退火过程中，发生凝聚，导致结构转变（弛豫或相变）过程；利用透射电子显微镜(TEM)作原位动态观测，获得有关$a$-Si:H薄膜凝聚过程形成分形结构的信息。

### 12.6.1 实验方法

薄膜样品：$a$-Si:H薄膜样品在射频等离子体化学气相淀积(RF-PCVD)系统中制备。气源为硅烷($SiH_4$)气体，以高纯氢气稀释至2.5%。为了在透射电子显微镜分析室中作退

火处理，原位观察薄膜因退火而发生结构转变的动态过程，所以$a$-Si:H薄膜样品的积淀温度控制在50°C。射频频率为11MHz，射频功率低于20W。薄膜淀积在NaCl晶体上。

TEM和TED实验：从NaCl晶体衬底上取下厚度控制在10—30nm的$a$-Si:H薄膜复盖在Mo制网格上，进行TEM分析。并作退火处理。温度范围从室温到900°C。薄膜由于温升发生变化，利用接入TEM的探头与录像系统联接，对样品的结构转变过程进行录像，以获得原位动态过程的全貌；同时通过选区透射电子衍射（*TED*）显示其结构状态。

### 12.6.2 图像处理、计算方法与结果

在不同退火温度条件下，用透射电子显微镜获得$a$-Si:H薄膜结构形貌的显微图像。图12-11为TEM像。2维图像上不同的灰度级代表薄膜中不同的缩聚密度，密度高则灰度大，反之亦然。

用PAL(*Phase Alternation line*)系统电视摄像装置完成图像的光电转换过程，把得到的模拟信号经过$A/D$转换，变为计算机可以计算的数字信号。计算机产生的图像的像点数为512×512，即在砂型方法（*Sandbox Method*）计算中正方点阵的规模为512×512。较高的像点数提供更精确的图像细节。图像的灰度级取32，没有取到此图像采集系统允许的128的灰度级数。较低的灰度级数有利于增强图像的对比度，也减少一些存储。计算在IBM-PC计算机上即可完成。

计算中心：确定计算中心是一个相当重要的问题，它决定了整个计算的准确性与可靠性。在计算中选取缩聚区的质量中心为计算中心。设$x_1$，$y_1$为图12-11($a$)的质量中心：

$x_2$, $y_2$为图12-11($b$)的质量中心。$x_1=210$, $y_1=250$; $x_2=300$, $y_2=260$。

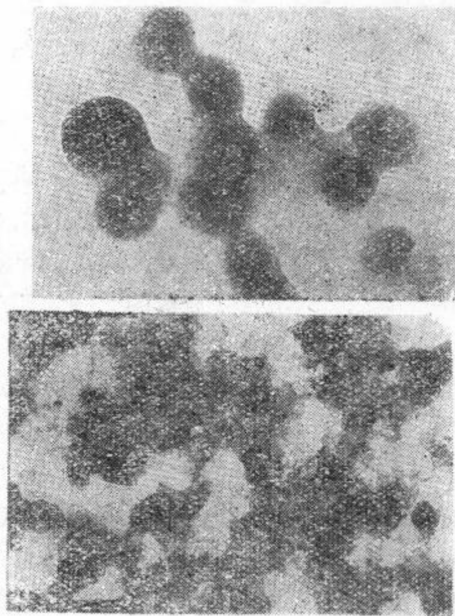


图12-11 $a$-Si:H TEM像

($a$) 450°C时分形结构; ($b$) 800°C时分形结构

灰度阈值:选取缩聚区,过渡区和非缩聚区的灰度阈值,以便对图像进行定量统计。按如下规定选取:对图12-11($a$),取$T_1 \geqslant 15$,即灰度级大于或等于15为缩聚区; $T_1 \leqslant 15$为非缩聚区。对图12-11($b$),取$T_2 \geqslant 21$,为缩聚区; $13 \leqslant T_2 \leqslant 20$为过渡区; $T_2 \leqslant 12$为非缩聚区。

*Sandbox*关系图:在计算中,正方点阵边长依次取1,3,5,……,计算在每个正方形内满足灰度级阈值的象点数$N$,

计算$\ln N$和$\ln L$，作*Sandbox*关系图（图12-12），得到在两种不同退火温度下的不同分维：$D_f=1.68$（退火温度450°C）；$D_f=1.76$（退火温度800°C）。

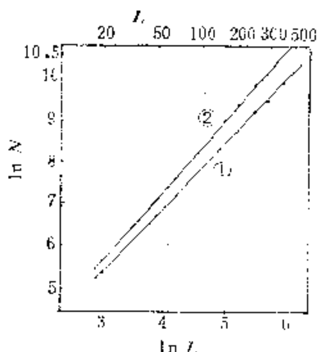


图12-12　*Sandbox*关系曲线

缩聚区面积统计：缩聚区域面积的计算是在已确定的阈值情况下，以各区域的象点数代表区域的面积。

退火温度为450°C时，缩聚区像点数与非缩聚区像点数的比例为59/41。

退火温度为800°C时，缩聚区像点数：过渡区像点数：非缩聚区像点数为51:20:29。

计算参数的选择：在计算中，改变其中部分参数，以观察其对运算过程和结果的影响。如改变点阵的像点数，从512到256或128时，随着像点的减少，精度下降，但计算存储减少，运算速度加快。又如当改变像点灰度数，$T'=32,16,8$等，各个区域的灰度选择范围减小，对比度增大，计算速度加快。总之，在计算中需要优化计算参数。

### 12.6.3　结构弛豫与相变的分形性质

#### 1．晶化过程与分形

在TEM高真空室中，$a$-Si:H薄膜样品作原位退火，从室温开始升温，在退火温度低于300°C的宽广温区内，TEM形貌像和TED图样（图12-13）表明，薄膜一直处于非晶态；

当温度升至300°C时，由于热激活能仍较小，因此，只有那些最有利的位置，才开始凝聚，形成稀疏孤立小的岛状结构，随机分布于薄膜中。此时仍为非晶态，图12-14为TEM像和TED图样。

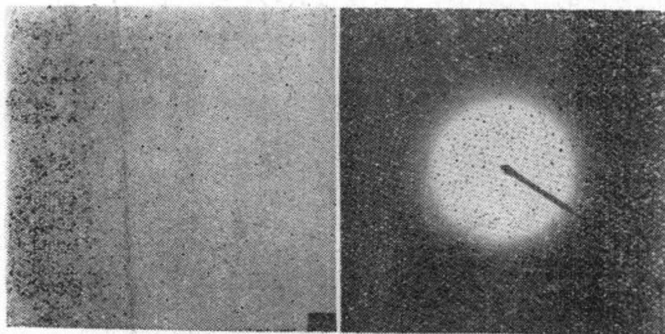


图12-13　$a$-Si:H的TEM像与TED图

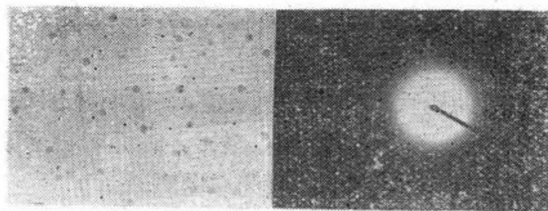


图12-14　产生孤立岛状结构的$a$-Si:H薄膜
($a$) TEM像；($b$) TED图样

随着退火温度的升高，孤立岛状微结构的数量增多，尺寸增大。当温度达到450°C时，从TEM实验观测中可以清晰地看到孤立小岛在无规的运动中，某些随机相遇的小岛互相粘连，形成类分叉状结构（见图12-11($a$)）。对此图形按

*Sandbox* 方法，通过图像处理和计算，从*Sandbox*关系曲线（图12-12）可以看到具有良好的线性关系，根据曲线线性部分斜率得到分形维数$D_f=1.68$。这一结果表明，图12-11(*a*)微结构图形具有空间，相关不变性即自相似性。从与图12-11(*a*)相对应的TED图样（图12-15(*a*)）可以看出，此时薄膜结构从非晶态向微晶态转变，是一种结构弛豫现象。

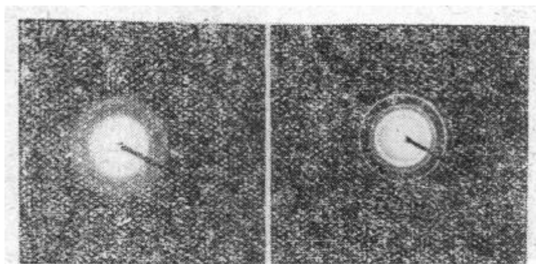


图12-15 TED图样

(*a*) 微晶图样；(*b*) 多晶图样

当退火温度升到800°C时，微结构发生迅速兼并，缩聚区扩大（图12-11(*b*)）。图像处理给出$D_f=1.76$。从*Sandbox*关系曲线良好的线性表明图形仍具有自相似性。图12-15(*b*)是与图12-11(*b*) 相对应的TED图样。图样所显示的锐环表明，薄膜结构已由微晶态硅转变为多晶态硅。

**2. 分形结构的形成**

从上述实验现象中可知，分形结构的产生与*a*-Si:H薄膜结构的转变密切相关。*a*-Si:H薄膜从非晶相向微晶相的结构弛豫，和从微晶相向多晶相的结构相变，正是形成不同分形结构的两个物理过程，即结构弛豫与相变过程。在过程中体系所表现出来的集体效应(*Collective Effect*)是产生分形

的原因所在。就动力学的观点而言，集体效应是由于长程关联作用。由于长程关联作用的存在，为薄膜中随机凝聚形成稳定凝聚团发展成尺寸较大的分形集团（见图12-11)提供了重要条件。

3. 物理量的突变

薄膜中分形结构的形成是薄膜内部结构弛豫或相变的表现，而标志结构转变的物理量也将发生变化。例如电导率上升，光吸收系数下降就是证明。图12-16为制备$a$-Si:H薄膜时的衬底温度$T_S$对电导率的$\sigma_d$的影响。

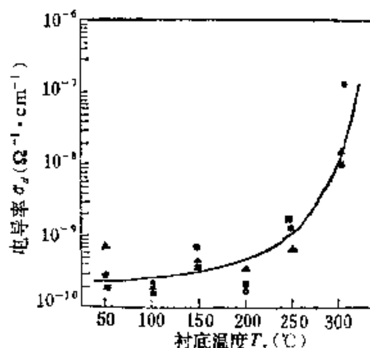



图12-16 电导率$\sigma_d$与衬底温度$T_S$的关系

$SiH_4$流量：■为70ml/min；▲为100ml/min；

●为130ml/min

从图12-16曲线可见，$a$-Si:H薄膜的电导率出现上升的趋势，说明由于薄膜结构从非晶态向微晶态转变，薄膜的结构有序度的提高，导致电导率的增大。这已被许多实验所证实。这里从物理量突变表明，分形结构的形成与薄膜的结构发生变化直接有关。

### 4. 晶化机制的讨论

随着退火温度的提高，薄膜中形成的众多凝聚团表面聚集着各种粒子：硅原子、原子团和硅氢化物等，它们具有高的表面迁移运动的能力。在退火低温端形成的分形结构是各种粒子表面无规运动所致。也就是说，此时分形结构的显微图像可以应用扩散限制凝聚模型来说明。TEM实验发现，$a$-Si:H薄膜的晶化过程与DLA模型存在某些相似之处，如在一定温度下（~450°C）出现类分叉结构，分维$D_f=1.68$也与DLA模型相一致。说明是由相同机制所决定的，即扩散限制凝聚机制。原子团通过表面扩散运动而粘连并参与生长分形集团。

当退火温度高达800°C时，由于凝聚团长大，同时兼并邻近的小晶粒，因此迅速形成较大的分形结构集团。跟踪录像表明，某些相邻近的晶化小区完成了相互兼并，同时进行局域结构调整，使各晶化区各自形成统一的晶格点阵，并在较高的温度下继续长大。灰度值大于21的缩聚区分维$D_f=1.76$，大于低温端的分维值。原来在低温端无规分布于薄膜中的小晶粒之间存在关联作用，促使局域有序化调整和继续长大。说明此时成核生长晶化机制取代了扩散限制凝聚机制。

# 参 考 文 献

## 分形原理

[1] Mandelbrot B B.The Fractal Geometry of Nature,Freeman, San Francisco. 1982.

[2] Pietronero L and Tosatti E Eds.Fractals in physics,North Holland,Amsterdam.New York.1986.

[3] Mandelbrot B B.Fractals:Form,Chance and Dimension, Freeman,San Francisco.1977.

[4] Feder J.Fractals,Plenum Press. New York.1988.

[5] 李后强，程光钺.分形与分维.成都：四川教育出版社，1990.

[6] 郝柏林.科学.38(1),9(1986).

[7] 李后强.化学通报.7,6(1988).

[8] Gleick J.Chaos,Making a New Science. Viking Penguin Inc. New York(1988).

[9] Nicolis G and Prigogine I.Exploring Complexity;罗久里，陈奎宁译，探索复杂性. 四川教育出版社，1986.

[10] 董连科.分形理论及其应用，辽宁科学技术出版社，1991.
[11] K J Falconer, Fractal Geometry, John Wiley and Sons,1990.
[12] Barnsley M.Fractals Everywhere,American Academic press.1988.

**分形生长与计算机模拟**

[13] Witten T A and Sander L M.Phys.Rev.Lett.47,1400(1981).
[14] Vicsek T,J.Phys.A16,L647(1983).
[15] Witten T A and Sander L M.Phys.Rev.B27,5686(1983).
[16] Plischke M and Racz Z.Fractals in Physics,Edited by Pietronero L and Tosatti E.Elsvier,New York,1986,P217.
[17] Meakin P,Phys.Rev.Lett.51,1119(1983).
[18] Z Xin (郑新) and Z Q Wu(吴自勤).Z.Phys..B73,129(1988).
[19] Kolb M et al. Phys.Rev.Lett..51, 1123 (1983).
[20] Vicsek T.Phys.Rev.Lett.53,2281(1984).
[21] Pietronero L et al. Physica. A151, 207 (1988).
[22] Sander L M.Nature.322,789(1986).
[23] Shechtman D et al.Phys.Rev. Lett.53, 1951(1984).

[24] Wang N and Chen H,Phys.Rev.Lett. 59,1010(1987).
[25] Chen H et al. Phys.Rev.Lett.60, 1645 (1988).
[26] Wang N and Kuo K H.Phil.Mag.Lett. 61,63(1990).
[27] Z,Peng (彭志忠).Science in China.B32, 215(1989).
[28] 沈步明，施倪承.科学通报.19,1484(1990).
[29] 王兴宝.分形理论及其应用.华中理工大学编印，1991,P24.
[30] 林鸿溢，沈庭芝，李映雪.电子学报.19(6),91 (1991).

**固体薄膜中的分形**

[31] Copra K.Thin Film Phenomena.Mcgraw-Hill,New York,1969.
[32] Elam W T et al.Phys.Rev.Lett.54, 701 (1985).
[33] Voss R F,Laibowitz R B and Allessandrini E I.phys. Rev. Lett. 49, 1441, (1982).
[34] Garfunkel G A and Weissman M B. Phys.Rev.Lett.55,296(1985).
[35] 侯建国，吴自勤.物理学报.37,1735(1988).
[36] 黄立基.材料中的分形.5-1(1989).
[37] 侯建国,毕岭松，吴自勤.物理学报.39(8), 1183

(1990).
[38] Baixin Liu (柳百新).Thin Films and Beam-Solid Interactions, L. Huang (ed.).Elserier Science.P351(1991).
[39] Lin H Y(林鸿溢)et al.Thin Film Phys. and Appl.vol.1519,210(1991).

分形凝聚

[40] 汪子江，龚昌德.物理学进展.10(1)，1(1990).
[41] 黄畇.物理.15(5),269(1986).
[42] 姚凯伦.物理.15(11),663(1986).
[43] 林鸿溢，李树奎，杨道明.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P 80(1991).
[44] 王牧，闵乃本.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P37(1991).
[45] 刘俊明.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P48(1991).
[46] 冯跃新，冯昌京,刘申之.物理学报.41,1(1992).

社会科学中的分形

[47] 张光鉴，张铁声.分形理论及其应用（程光钺主编).四川大学出版社，P100(1989).
[48] 黄登仕.分形理论及其应用（程光钺主编).四川大学出版社，P112(1989).
[49] 方曙，黄登仕.分形理论及其应用(程光钺主编).四川大学出版社，P119(1989).
[50] 方曙，黄登仕.科学.42(2),109(1990).

分维测量方法

[51] Mandelbrot B B.The Franctal Geometry of Natre,Fureeman,New Aork,P25 (1982).
[52] Feder J.Fractals, Plenum Press, New York,P200(1988).
[53] 穆在勤，李淑清，龙期威.材料科学进展.4(3)，247(1990).
[54] 刘文予，朱耀庭，朱光喜等.分形理论及其应用.华中理工大学编印，90(1991).
[55] 郭国霖，黄向东，陈月华，唐有棋.分形理论及其应用.华中理工大学编印，79(1991).
[56] 黄暹，柯家骏，马颂德.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P84(1991).
[57] 刘明华，梅安华，李光霞.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P106(1991).
混沌
[58] Hao B L(郝柏林).Chaos,World Scientific,Singapore(1984).
[59] Holden A V.Chaos, Manchester University Press(1986).
[60] Stewart H B and Thompson M.Nonlinear Dynamics and Chaos,Wiley(1986).
[61] Prigogine I and Stengers I.Order Out of Chaos,Bantam Books Inc.(1984).
[62] Barnsley M F and Demko S G.Chaotic Dynamics and Fractals,American Aca-

demic Press(1985).
[63] Macdonald S W, Grebogi C, Ott E. Physica. 17D, 125(1985).
[64] Swinney H L. Physica. 7D, 3(1983).
[65] May R. Nature. 261, 459(1976).
[66] Feigenbaum M J. Los Alamos Science. 1, 4(1981).
[67] Schaffer W M. Trends in Ecological Systems. 1, 63(1986).
[68] 裴留庆,颜勇.电子学报. 19(6), 80(1991).

**奇异吸引子**

[69] Lorenz E N. J. Atmospheric Sci. 20, 130 (1963).
[70] Ruelle D. Lecture Notes in Mathematics. 565, 146(1976).
[71] Henon M. Commun. in Mathem. Phys. 50, 69(1976).
[72] Ruelle D. Mathematical Intelligencer. 2, 126(1980).
[73] Sparrow C. The Lorenz Eguations, Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Springer-Verlag, 1982.
[74] Miles J. Advances in Applied Mechanics, 24, 189(1984).
[75] Hentschel H G E and Procaccia I, Physica, D8, 435(1983).

[76] Halsey T C et al. Phs. Rev. A33, 1141 (1986).
[77] Grassberger P and Procaccia I.Physica. D9, 189(1983).
[78] Farmer J D, Ott E and Yorke J A. Physica.D7, 153(1983).
[79] Frederickson P et al.J.Diff. Equ.49, 185(1983).
[80] Nicolis C and Nicolis G.Phys.Rev.A34 (3), 2384(1686).

**生物分形与内部调节**

[81] May R.Science.186, 645(1874).
[82] Lovelock J E.Gaia:A New Look at Life on Earth.Oxford University Press (1979).
[83] 张颖清.生物全息诊疗法.山东大学出版社, 1987.
[84] 田清涞，高崇明，曾耀辉等.生物学.化学工业出版社，1985.
[85] Mackay M C and Glass L.Science.197, 287(1977).
[86] Chay T R and Rinzel J.Biophysical Journal.47, 357(1985).
[87] Goldberger A L et al. American Heart Journal 107, 612(1984).
[88] Goldberger A L, Bhargava V and West B J.Physica.17D, 207(1985).

[89] Schaffer W M and Kot M.Bioscience. 35,349(1985).

[90] 王学贵.分形理论及其应用（程光钺主编）.四川大学出版社，P66.(1989)


**断裂的分形性**

[91] Mandelbrot B B, Passoja D E and Paullay A J.Nature.308,721(1984).

[92] C W Lung(龙期威)and Z Q Mu(穆在勤).Phys.Rev.B38(16),11781(1988).

[93] C W Lung(龙期威).Fractal in Physics, Edited by L.Pietronero and E.Tosatti, Elsvier,New York,P.189(1986).

[94] Termonia Y and Meakin P.Nature.320, 429(1986).

[95] Mandelbrot B B et al. Nature.308,721 (1984).

[96] 穆在勤，龙期威.金属学报.24(2),A142(1988).

[97] 谢和平，陈至达.力学学报.20(3)，264(1988).

[98] 谢和平.材料中的分形.4-1(1989).

[99] 杨道明，袁其兴，林鸿溢等.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P81(1991).


**地震的分形预报**

[100] 陈顒等.分形与分维在地震科学中的应用.地震出版社，1988.

[101] 平田隆幸.国际地震动态，11(1988).

[102] 陈顒.中国地震.4,2(1988).

[103] 李海华等.西北地震学报，9,4(1987).
[104] 洪时中，洪时明.科学.42(2)，105(1990).
[105] 朱传镇等.分形理论及其应用（程光钺主编）.四川大学出版社，P88(1989).
[106] 安镇文等.地震学报.11,3(1989).
[107] 戴维乐，叶峰，陆远忠.地震.5.1(1991).
[108] 蒋海昆，刁守中.地震.2,37(1991).
[109] 张晓东.地震.3,59(1991).

**相变与临界现象**

[110] Wilson K G.Phys.Rev.B4,3184(1971).
[111] 于渌，郝柏林.相变与临界现象.科学出版社，1984.
[112] Ma S K.Modern Theory of Critical Phenomena.Reading,Mass(1976).
[113] Stanley H E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Oxford University Press.London,1983.
[114] 陈式刚.物理学报.40(4),584(1991)。
[115] H Y Lin(林鸿溢),H S Zhu(朱鹤孙),Y X Li(李映雪).Proc.of Photovoltaic Sci. and Engin.Conf., Kyoto,Japen, P801 (1990).

**渗流现象与理论**

[116] Ziman J M. J.Phys.Cl,1532(1968).
[117] Eggarter T P and Cohen M H.Phys. Rev.Lett.25,807(1970);27,129(1971).

[118] Frish H L and Hammersley J M.J. Soc.Indust.Appl.Math.11,894(1963).
[119] Stauffer D.Introduction to Percolation Theory,Taylor and Francis. London, 1985.
[120] Huang L J et al. J.Phys.C21, L51 (1988).
[121] Huang L J et al.Scientia Sinica.A10, 1075(1988).
[122] 沈中城，华人炎.分形理论及其应用.华中理工大学编印，P64(1991).

**晶化过程的分维性**

[123] Radnoczi G et al. Phys.Rev.A35,4012 (1987).
[124] Ben-Jacob E et al. Phys.Rev.Lett 57,1901(1986).
[125] Duan Jian-Zhang and Wu Zi-Qin,Sol. Stat.Commu.64,1(1988).
[126] Deutscher G and Lereath Y.Phys.Rev. Lett.60,1510(1988)
[127] Alexsander S et al. Phys.Rev.Lett. 61,1514(1988).
[128] 黄立基，柳百新，丁菊仁等.物理学报.37,1480 (1988).
[129] 吴自勤.材料中的分形.2-1(1989).
[130] 林鸿溢.半导体学报.11(6),430(1990)

[131] Birringer R et al. Phys.Rev.Lett. A120,365(1984).

[132] Karch H et al. Nature.330,556(1987).

[133] Konuma M et al. Phil.Mag.B55,377 (1987)

[134] 王广厚，韩民.物理学进展.10(3),248(1990).

[135] 何宇亮.物理.20(1),22(1991).

[136] 朱星.物理.20(4),203(1991).

[137] Birringer R. Mat.Sci.Engin.A117, 33(1989).

[138] Lingrong Chen et al. Phys.Rev.B39, 5121(1989).

[139] 何宇亮，陈光华，张仿清.非晶态半导体物理学.高等教育出版社(1989).

[140] H Y Lin(林鸿溢).Thin Films and Beam Solid Interactions, L.Huang(ed.).Elsevier Science.North-Holland, P197 (19[illegible]).

[141] 林鸿溢，杨道明，李树李.第六届全国非晶态材料和物理学术讨论会文集.桂林，P49(1991).